
МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

ОПТИМИЗАЦИОННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВУХУРОВНЕВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОГРАНИЧЕННОГО РЕСУРСА МЕЖДУ ГРУППАМИ ЛЮДЕЙ

© 2015 г. Е.А. Галькова, Л.С. Маергойз¹

(Красноярск)

Разработана оптимизационная математическая модель двухуровневого распределения между группами людей ограниченного ресурса социально-экономического содержания. Ее конструкция базируется на предложенных принципах *справедливого* распределения. Дано полное описание допустимых линейных ограничений на параметры модели, выполняющих роль управляющих факторов процесса распределения ресурса. Приводится формализация модели как задачи квадратичного программирования с ограничениями в виде линейных равенств и неравенств. Показано применение модели в случае распределения ресурса в несколько этапов, разделенных промежутками времени и связанных между собой наличием одинакового рейтинга потребителей ресурса и общего для этих этапов “принципа управления”.

Ключевые слова: математическая модель, алгоритм оптимального распределения ресурса, экстремальная задача.

Классификация JEL: A13.

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе метод математического моделирования используется для исследования проблем распределения между группами людей ограниченного ресурса социально-экономического содержания. При рассмотрении этих проблем существенную роль могут играть аспекты нравственности и справедливости. Например, в вопросах распределения квот выбросов парниковых газов между различными странами. Попытки решить эту проблему на международном уровне до сих пор не привели к положительному результату (Маергойз, Сидорова, Хлебопрос, 2011). В строительной индустрии есть подобные проблемы, связанные с распределением жилья для различных категорий инвесторов. Это могут быть группы инвесторов с различными льготами или категории инвесторов, претендующие на разные по престижности части недвижимости. В этих условиях актуальной является задача нахождения оптимальных инвестиционных стратегий. Задача справедливого управления коллективным инвестированием возникает и при неравномерном потреблении какого-либо ресурса, если данные об объемах его потребления каждым инвестором не регистрируются (например, затраты на электроэнергию при использовании лифта жильцами многоквартирного дома) (Галькова, Маергойз, 2006; Галькова, Маергойз, Хлебопрос, 2008).

Особенно остро эта проблема возникает в чрезвычайной ситуации, когда обстановка требует автоматизации процесса распределения гуманитарной помощи между районами, в разной степени пострадавшими во время стихийного бедствия (Галькова, Маергойз, Хлебопрос, 2012). Процесс распределения гуманитарного ресурса можно рассматривать как процесс повышения общественного благосостояния. Существует ряд подходов, направленных на удовлетворение нравственных проблем. Среди этих подходов выделяются подходы английского социолога И. Бентама и американского философа Дж. Роулса. В.Л. Макаров так прокомментировал иссле-

¹ Авторы искренне признательны рецензенту за весьма полезные замечания, которые позволили сделать изложение статьи более комфортным для читателя. Авторы благодарны Р.Г. Хлебопросу за ценные обсуждения основных результатов работы, а также Ю.В. Коротковой за предоставленную библиографическую информацию.

дования этих ученых (Макаров, 2011): «Люди не пришли к единому мнению: что же такое счастье? И особенно, когда речь заходит о человечестве в целом. Одна из теорий предполагает, что счастье всех надо сложить, и, мол, это и есть счастье всего человечества. Это крайняя точка зрения, и она, на мой взгляд, антигуманна. Почему? А дело в том, что максимальную цифру можно получить очень просто. Создается общество, в котором все несчастные уничтожаются. Другая крайняя точка зрения звучит так: “максимальное счастье человечества – это счастье самого несчастного”. Нам надо найти нечто промежуточное».

Ю.В. Короткова исследовала математические модели принадлежащих И. Бентаму и Дж. Ролсу критериев справедливого распределения субсидий между различными группами людей с фиксированным начальным доходом. Их конструкции опирались на целевые функции, представляющие собой некоторые эмпирические функции полезности от труда и его оплаты (Короткова, 2010). Способы достижения компромисса интересов и справедливости в оплате труда исследовал Ю.Н. Гаврилец, рассмотревший вариант подхода к справедливости “когда нет обид”: когда удовлетворение каждого не меньше, по крайней мере, чем удовлетворенность любого другого. Он предложил конструкции математических моделей распределения оплаты в трудовом коллективе, использующих функции полезности его участников и учитывающих их квалификацию, трудолюбие, результаты труда (Гаврилец, 1992; Староверов, Котельникова, 2001, гл. 1).

В отмеченных выше работах авторов был предложен математический способ справедливого решения проблем распределения упомянутых видов ресурса. Цель статьи – расширить диапазон применения этих результатов и предложить математический критерий распределения ограниченного социальнозначимого ресурса между группами людей при наличии *строгого* рейтинга потребителей ресурса. Этот математический подход базируется на предложенных (на основе ряда объективных и субъективных оценок) принципах *справедливого* распределения ресурса. Точнее, статья посвящена разработке математического подхода к решению проблемы распределения ограниченного ресурса социально-экономического содержания между потребителями (группами людей), находящимися в дифференцированных условиях (Галькова, Маергойз, Хлебоброс, 2012, с. 74). При данном подходе пропорциональное распределение ресурса (например, по числу участников дележа ресурса) не является справедливым. Система потребителей ресурса характеризуется *двухуровневой* шкалой: определенным рейтингом их “престижности” и числовой шкалой, отражающей объем потребностей этих групп людей. В связи с этим рассматриваемое в работе распределение ресурса условно называется *двухуровневым*.

Основной результат работы – построение оптимизационной математической модели одноэтапного распределения ограниченного ресурса между группами людей. Дано полное описание допустимых линейных ограничений на параметры модели, выполняющих роль управляющих факторов процесса распределения ресурса. В отличие от упомянутых результатов Ю.Н. Гаврильца, Ю.В. Коротковой, конструкции моделей которых опирались на понятие функции полезности, в качестве целевой функции рассматривается квадратичный функционал. В заключение работы найдено приложение основного результата в случае, когда распределение ресурса происходит в несколько этапов, разделенных промежутками времени. Точнее, рассматривается вариант распределения, при котором этапы связаны между собой наличием *одинакового* рейтинга потребителей ресурса и *общего* для этих этапов “принципа управления”.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Пусть N ($N > 2$) – число потребителей рассматриваемого ресурса, система которых характеризуется числовой шкалой в условных единицах (называемых в дальнейшем баллами), содержащей значения количественного признака, характерного для всех групп, их веса (например, численность групп, число квадратных метров недвижимости, на которое они претендуют и пр.). Пусть C – количество ресурса (в соответствующих единицах). С математической точки зрения распределение ресурса означает разбиение на сумму величины

$$C = \sum_{i=1}^N C_i, \quad (1)$$

где C_i – количество ресурса, предназначенное для группы i . Пусть S_i – число баллов у группы i , $i = 1, \dots, N$, $S = \sum_{i=1}^N S_i$ – общее количество баллов у всех групп, $s_i = S_i/S$ – доля баллов для группы i .

Математическую модель распределения ресурса удобно описать, используя безразмерные величины. Полагаем, $c = C/S$ – средняя плотность ресурса (на 1 балл); $c_i = C_i/S_i$ – плотность ресурса для группы i , $\lambda_i = c_i/c$ – безразмерный коэффициент пропорциональности для группы i , где $i = 1, \dots, N$. Эти коэффициенты нельзя выбирать произвольно. Множество их допустимых значений при распределении ресурса между потребителями дает следующее предложение.

Утверждение. В указанных обозначениях количество ресурса C_i , предназначенное для группы i , определяется равенством

$$C_i = c\lambda_i S_i = \lambda_i s_i C, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2)$$

где значения коэффициентов λ_i удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i s_i = 1, \quad \sum_{i=1}^N s_i = 1, \quad s_i > 0. \quad (3)$$

Доказательство. Используя введенные обозначения и формулу (1), получаем (2) и равенство $C = \sum_{i=1}^N c_i S_i = cS$. Отсюда после элементарных преобразований выводим соотношение (3). ■

Если в выделенную группу входит несколько человек, считаем ее однородной по своему составу. Поэтому естественным является следующий принцип распределения.

Принцип пропорциональности внутри группы. Внутри любой группы каждый участник получает количество ресурса, пропорциональное соответствующему числу его баллов.

Пусть S_i – число баллов у группы i , где $i \in \{1, \dots, N\}$, а C_i – количество ресурса, предназначенное для этой группы. Если группа состоит из $n > 1$ человек, то $S_i = \sum_{m=1}^n S_{im}$, $C_i = \sum_{m=1}^n C_i^{(m)}$, где S_{im} – число баллов участника с номером m группы i , $C_i^{(m)}$ – количество распределяемого ему ресурса, $m = 1, \dots, n$. Из принципа пропорциональности и формулы (2) вытекает следующее предложение.

В принятых обозначениях справедливо равенство

$$C_i^{(m)} = c_i S_{im} = \lambda_i c S_{im}, \quad C_i = c_i S_i, \quad m = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4)$$

где c_i – плотность ресурса для группы i .

2. ОПТИМИЗАЦИОННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Учитывая наличие рейтинга потребителей (групп людей) при распределении ресурса, их нумерацию произведем в направлении возрастания плотностей ресурса (см. (4)) этих групп, т.е. $0 < c_1 < \dots < c_N$. Например, рейтинг пострадавших районов в чрезвычайной ситуации определялся возрастанием степени нуждаемости в гуманитарном ресурсе (Галькова, Маергойз, Хлебопрос, 2012).

При формализации модели рассмотрим безразмерные коэффициенты пропорциональности $\lambda_i = c_i/c$, $i = 1, \dots, N$ (безразмерные плотности ресурса потребителей), удовлетворяющие неравенству

$$0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_N, \quad (5)$$

причем, как следует из (3), $\lambda_1 < 1$, $\lambda_N \in (1, 1/s_N)$.

2.1. Дополнительные принципы распределения ресурса. Оптимизируем параметры модели, используя следующий принцип.

Принцип оптимальности. Вектор $(c_2 - c_1, \dots, c_N - c_{N-1})$, координаты которого характеризуют разности плотностей ресурса для групп со смежными номерами, имеет наименьшую длину.

Ассоциируем с данным принципом целевой функционал

$$\Phi(\lambda) = \sum_{i=1}^{N-1} (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^2 = c^{-2} \sum_{i=1}^{N-1} (c_{i+1} - c_i)^2, \quad (6)$$

который в зависимости от содержания ресурса может быть назван функционалом справедливости, или функционалом компромисса. Он является аналогом популярного в исследованиях прикладной математики функционала $\varphi(\lambda) = \sqrt{\Phi(\lambda)/(N-1)}$ – среднего квадратичного отклонений плотностей ресурса для групп со смежными номерами, – поскольку минимум каждого функционала $\Phi(\lambda)$, $\varphi(\lambda)$ при рассматриваемых ниже ограничениях (см. формулировку задачи А в п. 2.2) на коэффициенты пропорциональности $\lambda_i = c_i/c$, $i = 1, \dots, N$ достигается при одних и тех же значениях этих параметров. За предлагаемым далее критерием распределения социально экономического ресурса стоит принцип минимизации упомянутых функционалов, зависящих от разностей плотностей ресурсов для смежных по рейтингу групп. Такой подход к выбору критерия согласуется с принципом “чтобы не было обидно *sosedy*”.

Минимум функционала Φ (см. (6)) при условии (3) равен 0 и достигается при $\lambda_i = 1$, $i = 1, \dots, N$, что соответствует пропорциональному распределению среди всех потребителей ресурса, приемлемого при наличии рейтинга групп.

Для оптимизации параметров модели при условии (5) (при наличии рейтинга “престижности” потребителей ресурса) понадобится еще один принцип.

Принцип управления. Выбор дополнительного линейного соотношения, которому удовлетворяют безразмерные плотности ресурса потребителей

$$\sum_{i=1}^N d_i \lambda_i = b. \quad (7)$$

Здесь $d_1, \dots, d_N$, b – фиксированные числа такие, что система уравнений (3), (7) совместная и имеет ранг 2.

В упомянутых во введении работах авторов при построении оптимизационных моделей распределения ограниченного ресурса в конкретных социально-экономических ситуациях использовались равенства вида $\lambda_1/\lambda_N = c_1/c_N = \gamma$ или $\lambda_N = \gamma$, где γ – некоторое заданное число, имеющее явно выраженный экономический смысл. Например, при распределении гуманитарного ресурса в чрезвычайной ситуации выбиралось равенство $\lambda_1/\lambda_N = c_1/c_N = \gamma$, где $0 < \gamma < 1$ (Галькова, Маергойз, Хлебопрос, 2012). Здесь γ отражает оценку степени нуждаемости в том или ином ресурсе наименее пострадавшего района бедствия по сравнению с наиболее пострадавшим. Равенство $\lambda_N = \gamma$, где $\gamma > 1$, применялось в одной из задач по управлению коллективным инвестированием в стройиндустрии (Галькова, Маергойз, Хлебопрос, 2008). Оно символизирует допустимую “верхнюю планку” для плотности ресурса группы с наивысшим рейтингом, которая устанавливается исходя из реалий социально-экономической ситуации участников дележа ресурса. В статье (Маергойз, Сидорова, Хлебопрос, 2011), где предлагается алгоритм оптимального распределения квот выбросов парниковых газов, рассматривались существенно более сложные равенства вида $(7)^2$, ассоциированные с наличием уточненного рейтинга $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < 1 < \lambda_{n+1} < \dots < \lambda_N$. Такой рейтинг объясняется международными соглашениями: часть стран (с развитой экономикой), эмитентов газов, сделали уже очень много этих выбросов. Поэтому плотность выбросов этих стран (например, на душу населения) по соглашению должна быть меньше средней плотности выбросов газов всеми странами за фиксированный период времени.

² Соответствующие их общие формулы имеют достаточно громоздкий вид, поэтому здесь не приводятся.

Линейное равенство вида (7) – естественный аналог упомянутых равенств. Оно играет роль управляющего фактора процесса распределения ресурса, причем в конкретной ситуации можно выбрать наиболее востребованное ограничение такого вида. Опираясь на равенство (7), построим оптимизационную модель распределения ограниченного ресурса, являющуюся обобщением математических моделей распределения ресурса в рассмотренных социально-экономических ситуациях.

2.2. Задача А. Квадратичная формализация. Пусть $N > 2$. В обозначениях (7) необходимо определить допустимые значения параметров $d_1, \dots, d_N, b$ и (единственные) значения коэффициентов пропорциональности $\lambda_1 = \lambda_1^*, \dots, \lambda_N = \lambda_N^*$, при которых достигается минимум функционала Φ в (6) при выполнении соотношений (3), (5), (7).

С учетом (3), (7), введем следующие переменные:

$$D = \sum_{i=1}^N d_i, \quad R_j = \sum_{i=j+1}^N d_i, \quad P_j = \sum_{i=j+1}^N s_i, \quad j = 1, \dots, N-1,$$

$$A_j = (P_j D - R_j) / (D - b), \quad j = 1, \dots, N-1, \quad \|A\|^2 = \sum_{j=1}^{N-1} A_j^2.$$

Теперь мы можем сформулировать условия решения задачи А.

Теорема 1. *Решение задачи А существует тогда и только тогда, когда выполняются условия*

$$D - b \neq 0, \quad A_j > 0, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad \sum_{j=1}^{N-1} A_j P_j < \|A\|^2. \quad (8)$$

При этом функционал $\Phi(\lambda)$ достигает минимума при единственных значениях коэффициентов пропорциональности

$$\lambda_1^* = 1 - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{A_j P_j}{\|A\|^2}, \quad \lambda_k^* = \lambda_1^* + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{A_j}{\|A\|^2}, \quad k = 2, \dots, N, \quad (9)$$

а величина этого минимума m определяется по формуле

$$m = \frac{1}{\|A\|^2} = \frac{(D - b)^2}{\sum_{i=1}^{N-1} (P_i D - R_i)^2}. \quad (10)$$

Замечание. Близкий результат в существенно менее общей форме был найден ранее (Галькова, Маергойз, 2006). Теорема 1 дает полное описание допустимых значений параметров управления $d_1, \dots, d_N, b$, позволяющих решить задачу А. Любой возможный их выбор решает проблему оптимального управления процессом распределения ресурса.

Доказательство. Для решения задачи А введем положительные параметры (см. (5))

$$\alpha_i = \lambda_{i+1} - \lambda_i, \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (11)$$

Отсюда получаем формулы для коэффициентов пропорциональности:

$$\lambda_i = \lambda_1 + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j, \quad i = 2, \dots, N. \quad (12)$$

Рассмотрим систему, составленную из линейных уравнений (3) и (7). Сделаем замену переменных в ней и в функционале (6), используя равенства (11), (12). Подставляя формулу (12) в уравнение (3) системы, после элементарных преобразований имеем

$$\lambda_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \sum_{i=j+1}^N s_i = 1.$$

Итак, в обозначениях теоремы 1 получаем, что $\lambda_1 = 1 - \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j P_j$.

Аналогично произведя замену переменных и в уравнении (7) системы, приходим в обозначениях теоремы 1 к уравнению $\lambda_1 D + \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j R_j = b$. Исключим λ_1 из этого уравнения, используя первое уравнение системы, тогда имеем $\sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j (P_j D - R_j) = D - b$. Итак, решение задачи А сводится к нахождению точки минимума функционала

$$f(\alpha) = \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i^2, \quad (13)$$

если параметры (см. (5), (11)) $\lambda_1 > 0$, $\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_{N-1} > 0$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 - \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j P_j, \\ \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j (P_j D - R_j) = D - b, \end{cases} \quad (14)$$

эквивалентной исходной системе уравнений (3), (7). Поэтому, согласно принципу управления, система (14) тоже является совместной и имеет ранг 2. Следовательно, не все коэффициенты при неизвестных в ее втором уравнении равны 0. Кроме того, минимум m функционала $f(\alpha)$ (см. (13)) не равен 0 лишь тогда, когда $D - b \neq 0$ (если $D = b$, он не достигается в области $\{\alpha \in R^{N-1}: \alpha_1 > 0, \dots, \alpha_{N-1} > 0\}$). В этом случае данное уравнение в обозначениях теоремы 1 преобразуется к виду

$$\sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j A_j = 1, \quad N - 1 > 1. \quad (15)$$

С геометрической точки зрения минимум m функционала $f(\alpha)$ при выполнении условия (15) – квадрат расстояния от начала координат 0 в R^{N-1} до гиперплоскости, определяемой уравнением (15). Используя известные формулы аналитической геометрии, убеждаемся в том, что этот минимум определяется формулой (10) и достигается при единственных значениях параметров $\{\alpha_j\}$:

$$\alpha_j^* = \frac{A_j}{\|A\|^2} = \frac{(D-b)(P_j D - R_j)}{\sum_{i=1}^{N-1} (P_i D - R_i)^2}, \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (16)$$

Если $A_j > 0$ (см. (8)), то и $\alpha_j^* > 0$, где $j = 1, \dots, N-1$, и искомые коэффициенты пропорциональности удовлетворяют неравенству $\lambda_1^* < \dots < \lambda_N^*$, и наоборот. Кроме того, $\lambda_1^* > 0$ лишь тогда, когда $\sum_{j=1}^{N-1} A_j P_j < \|A\|^2$ (см. (8)). Находя значения λ_j^* , где $j = 1, \dots, N$, из (14) и (12), убеждаемся в справедливости равенств (9). ■

2.3. Алгоритм оптимального распределения ресурса. Теорема 1 и предложение 1 позволяют определить оптимальные параметры математической модели распределения ограниченного ресурса между потребителями, система которых характеризуется рассмотренной двухуровневой шкалой.

Следствие 1. В обозначениях формул (1), (2) количество C_i ресурса, предназначенное для группы i , определяется равенством

$$C_i = c_i S_i = c \lambda_i^* S_i = \lambda_i^* s_i C, \quad i = 1, \dots, N, \quad (17)$$

где значения коэффициентов пропорциональности находятся по формуле (9).

Проиллюстрируем изложенные результаты в случае, когда принцип управления реализуется в следующей конкретной форме.

Следствие 2. Пусть условие (7) имеет вид $\lambda_1 - \gamma\lambda_N = 0$, где γ – фиксированное число из интервала $(0, 1)$. Полагаем в обозначениях формулы (3), что

$$P_j = \sum_{i=j+1}^N s_i, \quad Q_j = \sum_{i=1}^j s_i, \quad j = 1, \dots, N-1.$$

Тогда в (17) коэффициенты $\lambda_1^*, \dots, \lambda_N^*$ определяются по формулам

$$\lambda_1^* = \gamma \sum_{j=1}^{N-1} (K_j / \|K\|^2), \quad \lambda_k^* = \lambda_1^* + (1 - \gamma) \sum_{j=1}^{k-1} (K_j / \|K\|^2),$$

где $k = 2, \dots, N$, $K_j = P_j + \gamma Q_j$, $j = 1, \dots, N-1$; $\|K\|^2 = \sum_{j=1}^{N-1} K_j^2$. Причем минимум m функционала

Φ в (6) равен $m = (1 - \gamma)^2 / \|K\|^2$.

Доказательство. В этом случае в обозначениях формулы (7) и теоремы 1 имеем

$$b = 0, \quad D = 1 - \gamma > 0, \quad R_j = -\gamma, \quad A_j = P_j + \gamma/(1 - \gamma), \quad A_j > P_j, \quad j = 1, \dots, N-1.$$

Отсюда вытекает справедливость соотношения (8) и, согласно теореме 1, существование решения задачи А. После несложных преобразований искомые коэффициенты и минимум функционала Φ находим из формул (9), (10), учитывая, что $P_j + Q_j = 1$, $j = 1, \dots, N-1$. ■

2.4. Приложение. Отметим важное свойство решения экстремальной задачи А и рассмотрим его возможное применение. Из структуры задачи А вытекает следующее утверждение.

Следствие 3. В предыдущих обозначениях (см., например, (17)) оптимальные безразмерные плотности ресурса потребителей $\lambda_1^*, \dots, \lambda_N^*$ не зависят от объема распределяемого ресурса.

Этот результат находит применение в случае, когда распределение ресурса происходит в несколько этапов, разделенных промежутками времени. Рассмотрим вариант распределения, при котором этапы связаны между собой наличием *одинакового* рейтинга потребителей ресурса и *общего* для этих этапов принципа управления. Например, подобная ситуация возникает в случае долгосрочного строительства недвижимости, когда связанные определенным рейтингом группы инвесторов вносят денежные вклады фирме-застройщику в несколько этапов.

Пусть N ($N > 2$) – число потребителей рассматриваемого ресурса, k – число этапов ($k > 1$). Допустим, что на этапе j , где $j = 1, \dots, k$, распределяется количество ресурса L_j в некоторых единицах. Тогда

$$C = \sum_{j=1}^k L_j - \quad (18)$$

весь объем поэтапно распределяемого ресурса. Возникает проблема распределения объема L_j на этапе j , $j = 1, \dots, k$ между потребителями. Это означает, что при любых $j \in \{1, \dots, k\}$, $i \in \{1, \dots, N\}$ верны равенства

$$L_j = \sum_{i=1}^N M_{ij}, \quad C_i = \sum_{j=1}^k M_{ij}, \quad (19)$$

где $\{M_{ij}, i = 1, \dots, N\}$ – ресурсы для всех групп на этапе j ; C_i – количество ресурса, предназначенное для группы i . В этих условиях справедлив модифицированный алгоритм поэтапного оптимального распределения ресурса в рассматриваемом случае, вытекающий из следствий 1 и 3.

Предложение 3. Пусть при решении задачи А (см. п. 2.2) на каждом этапе условный рейтинг потребителей и выбор соотношения (7) не зависят от номера этапа. Тогда в обозначениях следствий 1, 3 и формул (18), (19) оптимальные размеры распределяемых ресурсов для всех групп на каждом из этапов имеют вид

$$M_{ij} = \lambda_i^* s_i L_j, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, k. \quad (20)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Благосостояние общества (2011). [Электронный ресурс] Режим доступа: <http://www.funansust.ru/obshe-sek/effektivnost-i-effektivnost-i-blagosostoyanie/160-blagosostoyanie-obshhestva.html>, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: март 2015 г.).
- Гаврилец Ю.Н. (1992). Компромисс интересов и справедливость в оплате труда (модельный анализ) // *Экономика и математические методы*. Т. 28. № 4. С. 16–28.
- Галькова Е.А., Маергойз Л.С. (2006). Об одной линейной задаче коллективного инвестирования // *Сибирский журнал индустриальной математики*. Т. IX. № 3(27). С. 26–30.
- Галькова Е.А., Маергойз Л.С., Хлебопрос Р.Г. (2008). Приложения принципа оптимальности в задачах управления коллективным инвестированием // *Вестник Новосибирского гос. ун-та. Серия “Социально-экономические науки”*. Т. 8. № 1. С. 138–143.
- Галькова Е.А., Маергойз Л.С., Хлебопрос Р.Г. (2012). Математический алгоритм “справедливого” распределения гуманитарного ресурса и смежные вопросы // *Сибирский журнал индустриальной математики*. Т. XV. № 4(52). С. 71–77.
- Короткова Ю.В. (2010). Метод распределения ограниченного ресурса между различными группами на основании функции полезности // *Экономика и математические методы*. Т. 46. № 2. С. 89–99.
- Маергойз Л.С., Сидорова Т.Ю., Хлебопрос Р.Г. (2011). Математический алгоритм распределения выбросов парниковых газов // *Сибирский журнал индустриальной математики*. Т. XIV. № 2(46). С. 78–83.
- Макаров В.Л. (2011). Экономика счастья есть. [Электронный ресурс] Режим доступа: <http://www.ras.ru/digest/shownews.aspx?id=46de8441-9c22-4b82-92c7-88296151f2d4>, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: март 2015 г.).
- Староверов О.В., Котельникова С.Н. (2001). Моделирование социально-экономических процессов. М.: Московский государственный институт электроники и математики.

Поступила в редакцию
23.07.2014 г.

An Optimizational Mathematical Model of Two-Level Distribution of Limited Resources between Groups of People

Ye.A. Gal'kova, L.S. Maergoiz

Proposed an optimizational mathematical model of two-level distribution of a limited resource of social-economic contents between the groups of people. Its construction is based on some principles of a just distribution. It is given a full description of admissible linear restrictions of model parameters, which are control factors of the resource distribution process. A formalization of the model as a square programming problem with restrictions in the form of linear equalities and inequalities is represented. Given an application of the model in the case of manystaged distribution of the resource. Moreover, a rating of consumers and ‘regulating principle’ are the same at every stage.

Keywords: mathematical model, optimal distribution algorithm, extremal problem, management by collective investment.

JEL Classification: A13.