

известных функций полиномов первого и второго порядка от $\ln \bar{x}_{\min}$ (17), (20), (24). В небольших областях изменения аргумента эти функции обычно хорошо приближаются линейными функциями.

Проведенные в НИИ труда по данным формулам расчеты по нескольким отраслям для ряда значений $\bar{x}_{\min}$ подтверждают это предположение. Для каждой отрасли точки с координатами $\bar{x}_{\min}$, m легли на одну прямую и, кроме того, значения m , рассчитанные по формуле (17), дали хорошее совпадение со значениями средней заработной платы, определенными по эмпирическим данным за предыдущие годы (см. табл. 2)*. Точно так же и функция

$$t = \exp \{c_1 \ln \bar{x}_{\min} + c_2\}$$

очень близка к линейной функции от $\bar{x}_{\min}$.

Это дает возможность представить m и t в виде линейных функций от $\bar{x}_{\min}$:

$$\begin{aligned} m &= \beta_1 + \alpha_1 x_{\min}, \\ t &= \beta_2 + \alpha_2 x_{\min}. \end{aligned} \quad (22)$$

Коэффициенты β_1 , β_2 и α_1 , α_2 , можно определить по двум точкам (скажем, крайним) рассматриваемого интервала изменения $x_{\min}$. Если рассматривались значения $x_1 \min$, $x_2 \min$, ..., $x_k \min$, то

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{m_k - m_1}{x_k \min - x_1 \min}, & \beta_1 &= \frac{m_k x_1 \min - m_1 x_k \min}{x_1 \min - x_k \min}, \\ \alpha_2 &= \frac{p_k - p_1}{x_k \min - x_1 \min}, & \beta_2 &= \frac{p_k x_1 \min - p_1 x_k \min}{x_1 \min - x_k \min}, \end{aligned} \quad (23)$$

где m_1 , m_k , p_1 , p_k , t_1 , t_k — значения m , p и t , соответствующие значениям $x_1 \min$, $x_k \min$.

Представление средней заработной платы m и уровня t в виде линейных функций от значения $x_{\min}$ дает удобный аппарат для прогноза и исследования поведения этих величин.

4. Аппроксимация распределения заработной платы логарифмически-нормальной функцией открывает возможность новых подходов к изучению вопроса о формировании распределения семей по душевому доходу.

Полученные простые связи между основными параметрами распределения: средней заработной платой m и минимумом заработной платы $x_{\min}$, между $x_{\min}$ и долей работающих $p(T)$, получающих ниже некоторого интересующего нас уровня заработной платы T , побуждают нас искать пути, которые позволили бы непосредственно оценить влияние изменения параметров распределения заработной платы на распределение по душевому доходу.

Как показали расчеты, проведенные в последнее время в НИИ труда (по данным для различных областей СССР), фактическое распределение по доходу хорошо приближается логарифмически-нормальной функцией распределения, отклонения накопленных частот эмпирического и теоретического распределений составляют не более 2—3% (точность получается лучше, чем при аппроксимации распределения по заработной плате).

Поэтому один из возможных подходов к решению задачи о непосредственном переходе от распределения по заработной плате к распределению по душевому доходу состоит в непосредственном переходе от распределе-

* Значения минимума заработной платы $x_{\min}$ и средней заработной платы m могут быть использованы как параметры в общей модели народного хозяйства

ния по заработной плате к распределению семей по душевому доходу. Для этого составляется специальная таблица. Работа по составлению такой таблицы и изучению возможности ее использования ведется совместно с Лабораторией математических и статистических методов в экономике труда в НИИ труда.

Условно предположим, что имеется десять интервалов группировки по душевому доходу и десять интервалов группировки по заработной плате. Номер столбца означает соответствующий интервал для размера заработной платы, номер строки — интервал группировки по душевому доходу. Числа n_{0j} ($j = 1, \dots, 10$), стоящие в последней строке таблицы, есть полные численности работающих, размер заработной платы которых находится в j -м интервале. Каждый из столбцов $1, \dots, 10$ представляет собой распределение работающих с указанной заработной платой, т. е. коэффициенты k_{ij} ($i = 1, \dots, 10$; $j = 1, \dots, 10$) показывают долю работающих, получающих заработную плату в j -м интервале и находящихся в i -м интервале по душевому доходу. Следовательно, зная n_{0j} и коэффициенты k_{ij} , можно определить $n_{ij} = n_{0j} \cdot k_{ij}$ — численности работающих, получающих заработную плату в j -м интервале и находящихся в i -й группе по душевому доходу. Отсюда легко получить и $n_{i0} = \sum_{j=1}^{10} n_{ij}$ ($i = 1, \dots,$

$\dots, 10$) — полное число работающих для каждой группы по душевому доходу. Далее, коэффициенты k_i , стоящие в первом столбце таблицы, представляют для каждой группы по душевому доходу отношение числа работающих к числу семей N_i , находящихся в этой группе душевого дохода. Поэтому с помощью этих коэффициентов можно перейти от числа работающих n_{i0} к числу семей N_i , имеющих данный душевой доход. Таким образом, если мы знаем, как изменится на плановый период распределение работающих по заработной плате, т. е. можем определить новые численности n_{0j} работающих в каждой группе по душевому доходу, то, зная матрицу описанных выше коэффициентов, можем определить новые численности n_{i0} работающих в каждой группе по душевому доходу, а затем по коэффициентам k_i определить численности семей N_i , находящихся в каждой группе по доходу, или, другими словами, перейти к распределению семей по душевому доходу.

В заключение я хочу поблагодарить В. А. Волконского, предложившего тему данной работы, за постоянное внимание при ее выполнении, а также Н. М. Римащевскую за помощь при проведении всех необходимых расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. I. Aitchison, G. A. S. Brown. The Lognormal Distribution. Cambridge, 1957.
2. Г. Крамер. Математические методы статистики. М., Изд-во иностр. лит., 1948.
3. Н. Е. Рабкина, Н. М. Римащевская. Дифференциация заработной платы и ее прогнозирование. Экономика и матем. методы, 1965, № 6.

Поступила в редакцию
12 VI 1965

МЕТОДЫ БЛОЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Е. Г. ГОЛЬШТЕЙН

(Москва)

В настоящее время для анализа ряда частных моделей линейного программирования созданы специальные алгоритмы, значительно более эффективные по сравнению с общими методами линейного программирования. В качестве примера можно отметить транспортную задачу и некоторые модели транспортного типа. Любой из специальных алгоритмов линейного программирования основан на достаточно полном учете особенностей матрицы условий соответствующей задачи. Поэтому даже незначительное изменение условий задачи делает его, вообще говоря, неприменимым для ее решения. Возникает вопрос: можно ли приспособить алгоритм, разработанный для некоторой специальной модели линейного программирования, к анализу задач, близких к этой модели, но не совпадающих с ней. Приемы, с помощью которых специальные алгоритмы распространяются на более общие типы задач, относятся к так называемому блочному программированию.

В данной работе изучается задача линейного программирования вида

$$(C, X) \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$AX = B, \quad (2)$$

$$A^{(1)}X = B^{(1)}, \quad (3)$$

$$X \geq 0. \quad (4)$$

Здесь A и $A^{(1)}$ — матрицы размеров $m \times n$ и $m_1 \times n$ соответственно; $B, B^{(1)}, C$ — векторы соответственно с m, m_1, n компонентами; X — n -мерный вектор неизвестных. Предполагается, что матрица $A^{(1)}$ имеет специально облегчающую анализ линейной задачи с условиями (3), (4). Под методом блочного программирования здесь понимается алгоритм решения задач (1) — (4), основанный на анализе ряда линейных задач с условиями (3), (4). Ниже предлагается достаточно общий подход к формированию методов блочного программирования. Соответствующий класс методов блочного программирования содержит, в частности, известный метод разложения [1]. В него входят также блочные аналоги всех конечных методов линейного программирования. На основе разработанного подхода составляются более гибкие (по сравнению с принципом разложения и аналогичными ему методами) вычислительные схемы блочного программирования.

1. ДВОЙСТВЕННЫЙ ПОДХОД К БЛОЧНОМУ ПРОГРАММИРОВАНИЮ

1. Все дальнейшие рассуждения будут проводиться применительно к задаче линейного программирования вида (1) — (4). При этом ранг матрицы $A^{(1)}$ без ограничения общности считается равным m_1 , условия (3),

(4) предполагаются совместными. Ниже нам понадобится эквивалентная формулировка задачи (1) — (4), предложенная в [1].

Обозначим через G выпуклое многогранное множество, определяемое условиями (3), (4). Будем называть *элементами* G точки $X \in G$ и единичные направляющие векторы лучей, содержащихся в G . Элемент, совпадающий с вершиной множества G или идущий вдоль неограниченного ребра G , назовем *крайним*. Каждому крайнему элементу X_v поставим в соответствие вектор $\bar{P}_v = \begin{pmatrix} P_v \\ \varepsilon_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX_v \\ \varepsilon_v \end{pmatrix}$ и число $\sigma_v = (C, X_v)$, где ε_v равно 1 или 0 в зависимости от того, является ли X_v вершиной G или направляющим вектором неограниченного ребра этого множества. Применяя к множеству G известную теорему о представлении, нетрудно проверить, что задача (1) — (4) может быть сформулирована в следующей эквивалентной форме:

$$\sum_{v=1}^N \sigma_v z_v \rightarrow \max. \quad (5)$$

$$\sum_{v=1}^N \bar{P}_v z_v = \bar{B}, \quad (6)$$

$$z_v \geq 0, v = 1, 2, \dots, N. \quad (7)$$

Здесь $\bar{B} = (B)$, $X_v (v = 1, 2, \dots, N)$ — полный набор крайних элементов G .

Задачу (5) — (7), эквивалентную задаче (1) — (4), условимся в дальнейшем называть Z -задачей.

Перенумеруем для удобства крайние элементы X_v таким образом, чтобы первые N_1 векторов X_v отвечали вершинам множества G , а остальные $N - N_1$ — неограниченным ребрам этого множества. (Если G — ограниченное множество, $N - N_1 = 0$.)

Рассмотрим также Z -задачу, двойственную по отношению к Z -задаче (5) — (7):

$$(\bar{B}, \bar{\Lambda}) = (B, \Lambda) + \lambda \rightarrow \min, \quad (8)$$

$$(P_v, \Lambda) + \lambda \geq \sigma_v, \quad v = 1, 2, \dots, N_1, \quad (9)$$

$$(P_v, \Lambda) \geq \sigma_v, \quad v = N_1 + 1, \dots, N, \quad (10)$$

где $\bar{\Lambda} = (\Lambda, \lambda)$, $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$.

Поскольку линейная форма (8) подлежит минимизации, то при фиксированном Λ , удовлетворяющем требованиям (10), число λ следует выбирать возможно меньшим.

Поэтому систему условий (9) можно заменить соотношением

$$\max_{1 \leq v \leq N_1} [\sigma_v - (P_v, \Lambda)] = \lambda. \quad (11)$$

Из определений числа σ_v и вектора P_v имеем $\sigma_v - (P_v, \Lambda) = (C - \Lambda A, X_v) = (C_\Lambda, X_v)$, где через C_Λ обозначен вектор $C_\Lambda = C - \Lambda A$. Следовательно, соотношение (11) можно переписать в виде

$$\max_{1 \leq v \leq N_1} (C_\Lambda, X_v) = \lambda. \quad (12)$$

Приведенные рассуждения показывают, что задача минимизации функции

$$\max_{1 \leq v \leq N_1} (C_\Lambda, X_v) + (B, \Lambda) \quad (13)$$

при условиях (10) эквивалентна $\bar{Z}$ -задаче (8) — (10).

2. Пусть R — множество точек Λ , для которых

$$\sup_{x \in G} (C_\Lambda, X) = \max_{x \in G} (C_\Lambda, X) < \infty. \quad (14)$$

Введем в рассмотрение функцию $f(\Lambda)$, определяемую на множестве R соотношением

$$f(\Lambda) = \max_{x \in G} (C_\Lambda, X) + (B, \Lambda) \quad (15)$$

и равную ∞ вне этого множества.

Проверим, что R (в случае, если оно не пусто) является выпуклым многогранным множеством, которому соответствует система условий вида (10). С этой целью перепишем неравенства (10) в эквивалентной форме

$$(C_\Lambda, X_v) \leq 0, \quad v = N_1 + 1, \dots, N. \quad (16)$$

Любую точку $X \in G$ можно представить в виде

$$X = \sum_{v=1}^N X_v z_v; \quad \sum_{v=1}^{N_1} z_v = 1, \quad z_v \geq 0, \quad v = 1, 2, \dots, N. \quad (17)$$

Поэтому при соблюдении условий (16)

$$(C_\Lambda, X) \leq \max_{1 \leq v \leq N_1} (C_\Lambda, x_v) < \infty.$$

Если же для какого-то номера v_0 , лежащего между $N_1 + 1$ и N , $(C_\Lambda, X_{v_0}) > 0$, то, полагая $X(\theta) = X_1 + \theta X_{v_0}$, имеем $\lim_{\theta \rightarrow \infty} (C_\Lambda, X(\theta)) = \infty$. Поскольку $X(\theta) \in G$ для любого $\theta \geq 0$, то $\sup_{x \in G} (C_\Lambda, X) = \infty$.

Итак, множество R действительно определяется системой неравенств (10).

Если G — выпуклый многогранник, то $N_1 = N$, т. е. система условий (10) отсутствует. В этом случае R совпадает со всем m -мерным пространством точек Λ . Может оказаться, что множество R не содержит ни одной точки. Этот случай эквивалентен несовместности условий $\bar{Z}$ -задачи. В дальнейшем (если не оговорено противное) множество R будет предполагаться непустым.

Пусть $\Lambda \in R$. Из представления (17) получаем

$$f(\Lambda) - (B, \Lambda) = \max_{x \in G} (C_\Lambda, X) = \max_{1 \leq v \leq N_1} (C_v, X_v). \quad (18)$$

Поэтому задача (13), (10), эквивалентная $\bar{Z}$ -задаче (8) — (10), сводится к минимизации функции $f(\Lambda)$, определенной соотношением (15) на многогранном множестве R .

Если $\inf_{\Lambda \in R} f(\Lambda) = -\infty$, то, как следует из элементов теории двойственности, $\bar{Z}$ -задача (5) — (7) не имеет ни одного плана, т. е. условия (2) — (4) исходной задачи противоречивы.

Если же $\inf_{\Lambda \in R} f(\Lambda) = \min_{\Lambda \in R} f(\Lambda) = f(\Lambda^*) > -\infty$, то согласно (12) и (18) вектор $\bar{\Lambda}^* = (\Lambda^*, \lambda^*)$ при $\lambda^* = f(\Lambda^*) - (B, \Lambda^*)$ является решением $\bar{Z}$ -задачи.

В $(m+1)$ -мерном пространстве точек (Λ, λ_{m+1}) каждая вершина X_v ($v = 1, 2, \dots, N_1$) множества G порождает гиперплоскость H_v , определяемую уравнением

$$\lambda_{m+1} + (AX_v - B, \Lambda) = (C, X_v). \quad (19)$$

Уравнение (19) можно переписать в эквивалентном виде

$$\lambda_{m+1} = (C_\Lambda, X_v) + (B, \Lambda). \quad (20)$$

В этом же пространстве направляющий вектор X_v ($v = N_1 + 1, \dots, N$) каждого неограниченного ребра многогранного множества G порождает гиперплоскость H_v , определяемую уравнением

$$(AX_v, \Lambda) = (C, X_v), \quad (21)$$

или, что то же самое,

$$(C_\Lambda, X_v) = 0. \quad (22)$$

Гиперплоскость H_v пересекает ось λ_{m+1} при $1 \leq v \leq N_1$ и параллельна этой оси при $N_1 + 1 \leq v \leq N$.

Определим в рассматриваемом пространстве множество $\bar{R}$, состоящее из точек (Λ, λ_{m+1}) , для которых

$$\lambda_{m+1} \geq f(\Lambda), \Lambda \in R. \quad (23)$$

В силу (18) первое условие системы (23) можно переписать в виде

$$\lambda_{m+1} \geq (C_\Lambda, X_v) + (B, \Lambda), v = 1, 2, \dots, N_1. \quad (24)$$

Второе соотношение (23), как мы знаем, эквивалентно системе условий (10) или, что то же самое, (16). Следовательно, $\bar{R}$ — многогранное множество, которое совпадает с общей частью полупространств (24) и (16), порождаемых гиперплоскостями H_v ($v = 1, 2, \dots, N$). Из условий (23), определяющих множество $\bar{R}$, вытекает, что задача минимизации функции $f(\Lambda)$ на множестве R равносильна выбору «наинизшей» (в смысле оси λ_{m+1}) точки множества $\bar{R}$.

Поверхность $\lambda_{m+1} = f(\Lambda)$, $\Lambda \in R$ совпадает с частью границы выпуклого многогранного множества $\bar{R}$. Поэтому $f(\Lambda)$ — кусочно-линейная выпуклая вниз функция, определенная на R .

Резюмируем полученные выводы.

Теорема 1. Анализ Z -задачи (8) — (10) эквивалентен: 1) минимизации выпуклой вниз кусочно-линейной функции $f(\Lambda)$, заданной на выпуклом многогранном множестве R , где $f(\Lambda)$ и R определяются условиями (15) и (16) соответственно; либо 2) выбору «наинизшей» (в смысле оси λ_{m+1}) точки многогранного множества $\bar{R}$ — общей части полупространств (24) и (16).

Задача минимизации функции $f(\Lambda)$ на множестве R или, что то же самое, задача об отыскании наинизшей точки множества $\bar{R}$ является двойственной формулировкой блочной задачи (1) — (4) при фиксированном разделении системы условий (2) — (4).

Описанная здесь двойственная формулировка блочной задачи — частный случай общего подхода к формированию двойственных задач, изложенного в [2].

3. При анализе Z -задачи естественно рассматривать только такие точки множества $\bar{R}$, которые расположены на поверхности

$$\lambda_{m+1} = f(\Lambda). \quad (25)$$

Пусть $\bar{\Lambda}' = (\Lambda', \lambda'_{m+1}) \in \bar{R}$ — произвольная точка поверхности (25). Выделим те из гиперплоскостей H_v , которые проходят через точку $\bar{\Lambda}'$. Из

уравнений (20), (22) и определения функции $f(\Lambda)$ вытекает, что элемент X_v , порождающий одну из искомым гиперплоскостей, должен удовлетворять условию

$$\lambda'_{m+1} = (C_{\Lambda'}, X_v) + (B, \Lambda') = \max_{X \in G} (C_{\Lambda'}, X) + (B, \Lambda'), \quad (26)$$

если $1 \leq v \leq N_1$, и

$$(C_{\Lambda'}, X_v) = 0, \quad (27)$$

если $N_1 + 1 \leq v \leq N$.

Пусть G_{Λ} — множество решений задачи

$$(C_{\Lambda}, X) \rightarrow \max, \quad (28)$$

$$X \in G, \quad (29)$$

которую мы условимся называть X_{Λ} -задачей. Элемент X_v , удовлетворяющий равенству (26), является вершиной многогранного множества $G_{\Lambda'}$. Элемент X_v , подчиняющийся требованию (27), параллелен одному из неограниченных ребер множества $G_{\Lambda'}$.

Итак, гиперплоскости H_v , содержащие точку $\bar{\Lambda}'$, расположенную на поверхности (25), порождаются крайними элементами множества $G_{\Lambda'}$ решений X_{Λ} -задачи. Очевидно, верно и обратное утверждение: гиперплоскость H_v , порожденная одним из элементов $G_{\Lambda'}$, содержит точку $\bar{\Lambda}'$.

Пусть H — произвольная гиперплоскость, опорная для множества $\bar{R}$ в точке $\bar{\Lambda}'$ и не параллельная оси λ_{m+1} . Ее уравнение имеет вид

$$\lambda_{m+1} + (S, \Lambda - \Lambda') = \lambda'_{m+1}, \quad (30)$$

где $S = (s_1, s_2, \dots, s_m)$.

Из опорности гиперплоскости H вытекает, что ее направляющий вектор $\bar{S} = (S, 1)$ можно представить в виде неотрицательной комбинации направляющих векторов гиперплоскостей H_v , проходящих через точку $\bar{\Lambda}'$. Направляющий вектор гиперплоскости H_v , определяемой уравнением (19), равен $\bar{S}_v = (AX_v - B, 1)$. Направляющий вектор гиперплоскости H_v , отвечающей уравнению (21), равен $\bar{S}_v = (AX_v, 0)$. Следовательно,

$$S = \sum_{v=1}^{N_1} z_v (AX_v - B) + \sum_{v=N_1+1}^N z_v AX_v; \quad (31)$$

$$1 = \sum_{v=1}^{N_1} z_v, \quad z_v \geq 0, \quad v = 1, 2, \dots, N. \quad (32)$$

Равенство (31) можно переписать в виде $S = AX - B$, где

$$X = \sum_{v=1}^N z_v X_v. \quad (33)$$

Заметим, что в соотношении (31) $z_v = 0$, если гиперплоскость H_v не проходит через точку $\bar{\Lambda}'$. Поэтому точка X , определяемая равенствами (33) и (32), принадлежит множеству $G_{\Lambda'}$.

С другой стороны, легко проверить, что гиперплоскость

$$\lambda_{m+1} + (AX - B, \Lambda - \Lambda') = \lambda'_{m+1}, \quad (34)$$

определяемая любой точкой $X \in G_{\Lambda'}$, является опорной для множества $\bar{R}$ в точке $\bar{\Lambda}'$.

Аналогично устанавливается, что общий вид гиперплоскостей, опорных для $\bar{R}$ в точке $\bar{\Lambda}'$ и параллельных оси λ_{m+1} , определяется соотношением

$$(AX - B, \Lambda - \Lambda') = 0, \quad (34')$$

где X — направляющий вектор луча, содержащегося в $G_{\Lambda'}$.

Объединим в множество $H(\bar{\Lambda})$ гиперплоскости, опорные для $\bar{R}$ в точке $\bar{\Lambda}$. Полученные выводы можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Теорема 2. Множество $H(\bar{\Lambda}')$ состоит из гиперплоскостей вида (34) или (34'), где X — элемент множества $G_{\Lambda'}$.

Из теоремы 2 нетрудно получить выражение для приращения функции $f(\Lambda)$ при достаточно малом изменении ее аргумента.

В достаточно малой окрестности точки Λ' , содержащейся в R , гиперповерхность (25) состоит из кусков гиперплоскостей, принадлежащих множеству $H(\bar{\Lambda}')$.

Кроме того, если Λ' граничная точка R , то в достаточно малой ее окрестности граница $\bar{R}$ также состоит из кусков гиперплоскостей множества $H(\bar{\Lambda}')$.

Поэтому при достаточно малом $\varepsilon_0 > 0$ и любом заданном l теорема 2 приводит к соотношению

$$f(\Lambda' + \varepsilon l) = \sup_{X \in G_{\Lambda'}} [\lambda'_{m+1} - (AX - B, \varepsilon l)],$$

где $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Последнее может быть переписано в виде

$$\frac{f(\Lambda' + \varepsilon l) - f(\Lambda')}{\varepsilon} = \sup_{X \in G_{\Lambda'}} (B - AX, l). \quad (35)$$

Если правая часть (35) конечна, то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ точка $\Lambda' + \varepsilon l \in R$, и формула (35) определяет искомое приращение функции $f(\Lambda)$. Если же правая часть (35) не ограничена, то при любом $\varepsilon > 0$ точка $\Lambda' + \varepsilon l \notin R$.

4. Очевидно, точка $\bar{\Lambda}^* = (\Lambda^*, \lambda^*_{m+1})$ является искомой «наинизшей» точкой многогранного множества $\bar{R}$ в том и только в том случае, если гиперплоскость $\lambda_{m+1} = \lambda^*_{m+1}$ принадлежит множеству $H(\bar{\Lambda}^*)$, т. е. опорна для $\bar{R}$ в точке $\bar{\Lambda}^*$. Согласно теореме 2 это эквивалентно существованию вектора X^* , удовлетворяющего условиям

$$X^* \in G_{\Lambda^*}, \quad (36)$$

$$AX^* = B. \quad (37)$$

Нетрудно понять, что вектор X^* , подчиняющийся требованиям (36) и (37), — решение задачи (1) — (4). Действительно, поскольку X^* — решение X_{Λ^*} -задачи, удовлетворяющее условию (37), то для любого плана X задачи (1) — (4)

$$\begin{aligned} (C, X) &\leq f(\Lambda^*) = (C_{\Lambda^*}, X^*) + (B, \Lambda^*) = (C, X^*) + \\ &+ (B - AX^*, \Lambda^*) = (C, X^*). \end{aligned}$$

В методе блочного программирования, предложенном Данцигом — Вулфом [1], движение к оптимуму осуществляется по парам точек (Λ, X) , удовлетворяющих условию (37). Соотношение (36) проверяется путем решения X_{Λ} -задачи. Как только оно оказывается выполненным, искомый оптимальный план найден.

Поясним геометрический смысл метода разложения. Пусть имеется опорный план Z -задачи с базисом, составленным из векторов $\bar{P}_{i_s} = \begin{pmatrix} AX_{i_s} \\ e_{i_s} \end{pmatrix}$, $s = 1, 2, \dots$

$\dots, m+1$ и базисными компонентами z_{s0} .

Каждому элементу X_{i_s} соответствует гиперплоскость H_{i_s} вида (19), если X_{i_s} — вершина G и вида (21), если X_{i_s} — направляющий вектор неограниченного ребра G .

Пусть (Λ, λ^1) — вектор оценок условий Z -задачи относительно данного базиса. Положим $\lambda = \lambda^{(1)} + (B, \Lambda)$. Как нетрудно проверить, $\bar{\Lambda} = (\Lambda, \lambda)$ — общая точка гиперплоскостей H_{i_s} . Если точка $\bar{\Lambda} \in \bar{R}$, т. е.

$$\Lambda \in R, \quad \lambda = f(\Lambda), \quad (38)$$

то $X = \sum_{s=1}^{m+1} z_{i_s} X_{i_s}$ — оптимальный план задачи (1)–(4); $\bar{\Lambda}$ — «наинизшая» точка множества R . Условия (38) проверяются в процессе анализа X_Λ -задачи.

Неразрешимость X_Λ -задачи означает нарушение первого условия системы (38). Обнаружив это, мы вводим в базис Z -задачи вектор, который отвечает одной из гиперплоскостей вида (21), разделяющих точку $\bar{\Lambda}$ и множество $\bar{R}$.

Если X_Λ -задача разрешима, но вычисленное значение $f(\Lambda) > \lambda$, то в базис Z -задачи вводится вектор, который соответствует некоторой гиперплоскости вида (19), разделяющей $\bar{\Lambda}$ и $\bar{R}$.

Таким образом, процесс решения задачи (1)–(4) методом Данцига — Вулфа связан с движением к «наинизшей» точке множества $\bar{R}$ по точкам $\bar{\Lambda} = (\Lambda, \lambda) \notin \bar{R}$. При этом в случае разрешимости задачи (1)–(4) все промежуточные точки $\bar{\Lambda}$ лежат «под» гиперплоскостью $\lambda_{m+1} = f(\Lambda^*)$, расстояние до которой монотонно сокращается. (Здесь $\Lambda^* = (\Lambda^*, f(\Lambda^*))$ — «наинизшая» точка множества $\bar{R}$).

5. Двойственная формулировка блочной задачи подсказывает следующий естественный подход к решению задачи (1)–(4). Согласно этой формулировке, анализ исходной задачи сводится к минимизации выпуклой вниз кусочно-линейной функции $f(\Lambda)$, определенной на некотором многогранном множестве R .

Специфика задачи минимизации функции $f(\Lambda)$ состоит в том, что, во-первых, $f(\Lambda)$ задана лишь алгоритмически (для отыскания ее значения в точке Λ необходимо решить X_Λ -задачу), а во-вторых, эта функция дифференцируема не во всех точках, и следовательно, методы минимизации гладких функций в данном случае неприменимы.

Остановимся на общей схеме процесса минимизации функции $f(\Lambda)$. Выберем некоторую исходную точку $\Lambda' \in R$ и попытаемся найти такое направление l' , чтобы при достаточно малом сдвиге из точки Λ' в направлении l' функция $f(\Lambda)$ убывала. Назовем такое направление *подходящим*. Согласно формуле (35), необходимое и достаточное условие для того, чтобы данное направление l было подходящим, состоит в соблюдении неравенства

$$\max_{x \in G_{\Lambda'}} (B - AX, l) < 0. \quad (39)$$

Множество направлений, подчиняющихся условию (39), обозначим через $L_{\Lambda'}$. Допустим, что у нас имеется некоторый способ T выбора $l \in L_{\Lambda'}$ для любого непустого множества $L_{\Lambda'}$. С помощью способа T выделим направление l' либо убедимся в том, что множество $L_{\Lambda'}$ подходящих направлений пусто. В последнем случае Λ' — искомая точка минимума функции $f(\Lambda)$. Если же направление $l' \in L_{\Lambda'}$ обнаружено, сдвинемся в точку

$$\Lambda'' = \Lambda(l', \theta') = \Lambda' + \theta' l'. \quad (40)$$

Выбор числа $\theta' > 0$, участвующего в формировании точки (40), подчиним естественному требованию: функция скалярного аргумента t $\varphi(t) = f(\Lambda' + tl')$ должна быть монотонно убывающей при $0 \leq t < \theta'$. Способ выбора числа θ' , удовлетворяющего приведенному выше условию,

обозначим через E . Получив точку $\Lambda'' = \Lambda' + \theta' l'$, применим к ней те же рассуждения и т. д. Итак, задавшись некоторыми способами T выбора подходящего направления и E определения числа θ' , получаем монотонно убывающую последовательность $\{f(\Lambda^{(k)})\}$.

В последующих разделах будет указан ряд способов T и E , приводящих к искомой нижней грани функции $f(\Lambda)$, т. е. таких, что $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\Lambda^{(k)}) = \inf_{\Lambda \in R} f(\Lambda)$. Каждая пара таких способов, как мы увидим, определяет некоторый метод блочного программирования.

На основе этих способов могут формироваться также комбинированные методы блочного программирования, когда в процессе решения задачи используются различные способы T и E .

Общей чертой методов блочного программирования, укладываемых в приведенную схему, является то, что в противоположность методу разложения их реализация связана с движением по поверхности (25).

II. ДВОЙСТВЕННЫЙ АНАЛОГ МЕТОДА РАЗЛОЖЕНИЯ

6. Первый процесс решения блочной задачи (1) — (4), на котором мы остановимся, связан с движением по вершинам многогранной поверхности (25) или, что то же самое, по вершинам многогранного множества $\bar{R}$ с условиями (10), (24). Для начала процесса необходимо знать $m+1$ гиперплоскостей H_{s_i} ($i = 1, 2, \dots, m+1$), пересечение которых определяет искомую вершину $\Lambda' = (\Lambda', \lambda')$.

Направляющий вектор n_v гиперплоскости H_v , идущий внутрь множества $\bar{R}$, согласно соотношениям (10) и (24) имеет вид

$$n_v = \begin{pmatrix} AX_v - \varepsilon_v B \\ \varepsilon_v \end{pmatrix}, \quad (41)$$

где

$$\varepsilon_v = \begin{cases} 1, & \text{если } v \leq N_1 \\ 0, & \text{если } v > N_1. \end{cases} \quad (42)$$

Пусть $\bar{l}_i = (l_{i1}, l_{i2}, \dots, l_{i, m+1})$ — вектор, идущий параллельно пересечению гиперплоскостей $H_{s_1}, H_{s_2}, \dots, H_{s_{i-1}}, H_{s_{i+1}}, \dots, H_{s_{m+1}}$ и составляющий острый угол с вектором n_{s_i} . Очевидно, при соответствующей нормировке

$$(n_{s_\alpha}, \bar{l}_i) = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha \neq i, \\ 1, & \text{если } \alpha = i. \end{cases} \quad (43)$$

Следовательно,

$$\|\bar{l}_{ij}\|_{m+1} = (n_{s_1}, n_{s_2}, \dots, n_{s_{m+1}})^{-1}. \quad (44)$$

Если последняя компонента $l_{i, m+1}$ направления $\bar{l}_i = (l_i, l_{i, m+1})$ неотрицательна, то движение от точки Λ' вдоль направления $\bar{l}_i$ не уменьшит значение функции $f(\Lambda)$. При выполнении этого условия для всех i , т. е. при

$$l_{i, m+1} \geq 0 \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, m+1, \quad (45)$$

точка Λ' является искомым минимумом. Сделанное заключение вытекает из известного признака оптимальности, используемого в методе последовательного улучшения плана.

Предположим, что многогранное множество $\bar{R}$ является невырожденным, т. е. в каждой его вершине пересекается ровно $m+1$ гиперплоско-

стей H_v . В этом случае для любого $1 \leq i \leq m+1$ луч $\bar{\Lambda}' + \theta \bar{l}_i$, $\theta \geq 0$ содержит ребро этого множества, исходящее из точки $\bar{\Lambda}'$. Поэтому существует такое $\theta_0 > 0$, что

$$\bar{\Lambda}' + \theta \bar{l}_i \in \bar{R}, \quad \text{если} \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0. \quad (46)$$

Пусть условие (45) не соблюдается, т. е. для некоторых i

$$l_{i, m+1} < 0. \quad (47)$$

В силу (46) любое из таких направлений является подходящим, так как при достаточно малом $\theta > 0$ $\lambda'_{m+1} = f(\Lambda') > f(\Lambda' + \theta l_i) = \lambda'_{m+1} + \theta l_{i, m+1}$. Вычисление направлений l_i и выбор среди них подходящих можно производить не только из соотношения (44), но и с помощью матрицы $\|e_{ij}\|_{m+1} = (\bar{P}_{s_1}, \bar{P}_{s_2}, \dots, P_{s_{m+1}})^{-1}$, где $\bar{P}_v = \begin{pmatrix} P_v \\ \varepsilon_v \end{pmatrix}$ — вектор условий Z -задачи (5) — (7), отвечающий крайнему элементу X_v . Действительно, как нетрудно проверить,

$$l_{ij} = \begin{cases} e_{ij}, & \text{если } j \leq m, \\ e_{i0}, & \text{если } j = m+1, \end{cases} \quad (48)$$

где e_{i0} — коэффициенты разложения вектора ограничений $\bar{B} = \begin{pmatrix} B \\ 1 \end{pmatrix}$ задачи (5) — (7) по системе векторов $\bar{P}_{s_i}$, $i = 1, 2, \dots, m+1$.

7. Выберем одно из направлений, подчиняющихся требованию (47) (например, из условия минимальности последней компоненты). Пусть этим направлением является $\bar{l}_r$. Величина θ' шага, который следует сделать вдоль выбранного направления $\bar{l}_r$, определяется условием перехода в вершину $\bar{\Lambda}''$ множества $\bar{R}$, соседнюю по отношению к $\bar{\Lambda}'$. Для выбора θ' рассмотрим параметрическую задачу, которая состоит в максимизации линейной формы

$$(C_{\Lambda'} - \theta l_r A, X), \quad (49)$$

зависящей от параметра $\theta \geq 0$, при условии

$$X \in G. \quad (50)$$

Выбрав в качестве исходного опорного плана одну из вершин X_{s_i} множества G , порождающих гиперплоскости H_{s_i} ($i \neq r$), применим к задаче (49), (50) известный метод параметрического программирования (см., например, [3], гл. 8).

Как известно, отдельный шаг этого метода совпадает с итерацией метода улучшения плана при специальном правиле выбора вектора, подлежащего включению в базис. Процесс решения задачи (49), (50) продолжается до выявления одной из следующих возможностей.

1°. Найдена минимальная положительная критическая точка θ_1 , и построен опорный план X_h задачи (49), (50), оптимальный при $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, $\theta_2 > \theta_1$.

2°. Обнаружено, что для $0 \leq \theta \leq \theta_1$ задача (49), (50) разрешима, причем на $[0, \theta_1]$ нет критических точек, а в случае $\theta > \theta_1$ линейная форма (49) неограничена на множестве G . Одновременно построен направляющий вектор X_h неограниченного ребра множества G , на котором (49) неограничена при $\theta > \theta_1$.

3°. Задача (49), (50) разрешима на луче $\theta \geq 0$, который не содержит критических значений. Положим в этом случае $\theta_1 = \infty$.

Из предположения о невырожденности многогранного множества $\bar{R}$ вытекает, что $f(\Lambda' + \theta l_r) = f(\Lambda') + \theta l_{r, m+1}$ для любого конечного θ , под-

чиняющегося условию

$$0 \leq \theta \leq \theta_1. \quad (51)$$

Следовательно, реализация возможности 3°, при которой $\theta_1 = \infty$, ведет к соотношению $\inf_{\Lambda \in R} f(\Lambda) = -\infty$, указывающему на несовместность условий задачи (1) — (4). Пусть анализ задачи (49), (50) завершился случаем 1° или случаем 2°. Геометрически это означает, что движение вдоль ребра множества $\bar{R}$ с направляющим вектором $\bar{l}_r$ приводит на гиперплоскость H_k , порожденную вектором X_k .

В случае 1° вектор X_k отвечает вершине множества G ; в случае 2° вектор X_k направлен вдоль неограниченного ребра множества G . Полагаем $\Lambda'' = \bar{\Lambda}' + \theta' \bar{l}_r$, $\theta' = \theta_1$.

Новая вершина $\bar{\Lambda}''$ образована пересечением гиперплоскостей $H_{s_1}, H_{s_2}, \dots, H_{s_{r-1}}, H_k, H_{s_{r+1}}, \dots, H_{s_{m+1}}$. Следующий шаг производят по тем же правилам, отправляясь от точки $\bar{\Lambda}''$. Перед началом шага матрица (44) преобразуется в новую матрицу, в которой вектор n_{s_r} заменен на $n_k = \begin{pmatrix} AX_k - \varepsilon_k B \\ \varepsilon_k \end{pmatrix}$. Делается это с помощью обычных рекуррентных формул линейного программирования.

8. Как уже отмечалось, в невырожденном случае $\theta' > 0$ и на каждом шаге метода значение функции $f(\Lambda)$ понижается. При наличии вырожденной ситуации θ' может оказаться равным нулю. В этом случае $\bar{\Lambda}'' = \bar{\Lambda}'$. Результат данного шага состоит лишь в переходе к новой системе $m+1$ гиперплоскостей, пересекающихся в точке $\bar{\Lambda}'$. Для того чтобы иметь возможность осуществить отдельный шаг описанного процесса, не предполагая невырожденности множества $\bar{R}$, следует дополнить условия случаев 1°, 2° и 3°.

По определению θ_1 — неотрицательное число, которое может обратиться в нуль только в случае 2°. При $\theta_1 > 0$ обозначим через $X_{k'}$ опорное решение задачи (49), (50) при всех конечных значениях θ , заключенных между нулем и θ_1 . Положим $\alpha = -(l_r A, X_{k'}) + (l_r, B)$. Очевидно, $\alpha \geq l_{r, m+1}$.

При $\alpha = l_{r, m+1}$ (что всегда справедливо для невырожденной ситуации) или $\theta_1 = 0$ течение процесса определяется правилами, описанными выше.

Если же $\theta_1 > 0$ и $\alpha > l_{r, m+1}$, то гиперплоскость H_{s_r} заменяется гиперплоскостью, порожденной вектором $X_{k'}$. Очевидно, в последнем случае $\theta' = 0$, т. е. $\bar{\Lambda}' = \bar{\Lambda}''$.

Правило выбора вектора X_k или $X_{k'}$, дающее полную гарантию от возможности заикливания в рассмотренном методе, достаточно громоздко и к тому же подобно любому аналогичному правилу имеет небольшую практическую ценность. В связи с этим его описание здесь не приводится.

9. Используя формулу (48), легко проверить, что описанный здесь метод блочного программирования сводится к решению Z -задачи методом уточнения оценок, т. е. является двойственным аналогом метода разложения. Матрица $(\bar{P}_{s_1}, \bar{P}_{s_2}, \dots, \bar{P}_{s_{m+1}})$ составляет базис псевдоплана Z -задачи. Отрицательная компонента разложения вектора $\bar{B}$ по базису псевдоплана определяет вектор $\bar{P}_{s_r}$, подлежащий удалению из базиса. Вектор условий Z -задачи, заменяющий $\bar{P}_{s_r}$ в базисе, разыскивается в процессе анализа задачи (49), (50).

Метод, близкий к описанному в этом параграфе, был предложен из других соображений в работе [4].

Различие обоих методов обнаруживается только на этапе определения величины θ' . В работе [4] для этой цели исследуется некоторая задача дробно-линейного программирования. Способ определения θ' , предложенный в [4], эквивалентен анализу параметрической задачи (49), (50), если отпираться от начального значения $\theta = \infty$. Поскольку такой путь определения θ' связан с вычислением всех положительных критических значений, рассмотренный здесь метод, в котором исходное значение $\theta = 0$, следует признать более эффективным. Отметим, что приведенный метод является одной из реализаций общей схемы, изложенной в п. 5, при специальных способах T и E .

III. РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ ВЫБОРА ПОДХОДЯЩЕГО НАПРАВЛЕНИЯ

10. Как было указано в п. 5, в основе любого метода блочного программирования, связанного с минимизацией функции $f(\Lambda)$, лежит определенный способ (или определенные способы) выбора подходящего направления. В частности, в двойственном аналоге метода разложения, описанном в разделе II, выбор подходящего направления производится среди проекций ребер многогранного множества $\bar{K}$.

Ниже приводится общая схема формирования способов T , принадлежащих некоторому достаточно широкому классу.

Пусть l — произвольное направление, исходящее из точки Λ' . Введем функцию

$$\varphi(l, \Lambda') = \sup_{x \in G_{\Lambda'}} (B - AX, l). \quad (52)$$

Как следует из соотношения (39), выбор подходящего направления эквивалентен построению вектора l , удовлетворяющего неравенству

$$\varphi(l, \Lambda') < 0. \quad (53)$$

Выберем произвольное выпуклое многогранное множество M точек $l = (l_1, l_2, \dots, l_m)$, подчиняющееся двум требованиям:

1. Точка $0 = (0, 0, \dots, 0)$ — внутренняя точка M ;

2. $v_0 = \inf_{l \in M} \varphi(l, \Lambda') > -\infty$.

(54)

(55)

Множество M и точка Λ' порождают задачу $\Gamma(M, \Lambda')$, состоящую в минимизации функции $\varphi(l, \Lambda')$ при условии $l \in M$. Задача $\Gamma(M, \Lambda')$ легко приводится к задаче линейного программирования. В самом деле, пусть $X_1, X_2, \dots, X_{\gamma_1}$ — вершины множества $G_{\Lambda'}$, $X_{\gamma_1+1}, X_{\gamma_1+2}, \dots, X_{\gamma}$ — направляющие векторы неограниченных ребер $G_{\Lambda'}$. Допустим также, что система условий, определяющая M , имеет вид

$$\sum_{j=1}^m d_{ij} l_j \leq d_i, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (56)$$

Как нетрудно видеть, задача $\Gamma(M, \Lambda')$ эквивалентна задаче линейного программирования, состоящей в минимизации

 v

(57)

при условиях

$$(B - AX_i, l) \leq v, \quad i = 1, 2, \dots, \gamma_1; \quad (58)$$

$$-(AX_i, l) \leq 0, \quad i = \gamma_1 + 1, \dots, \gamma; \quad (59)$$

$$\sum_{j=1}^m d_{ij} l_j \leq d_i, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (60)$$

Условие (54) гарантирует совместность ограничений (58)–(60). Требование (55) обеспечивает ограниченность снизу линейной формы (57) на множестве (58)–(60). Следовательно, задача (57)–(60) разрешима, а вместе с ней разрешима и задача $\Gamma(M, \Lambda')$, т. е. $\nu_0 = \inf_{l \in M} \varphi(l, \Lambda') = \varphi(l^*, \Lambda')$, причем в силу (54)

$$\nu_0 \leq 0. \quad (61)$$

Введем далее в рассмотрение задачу $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda')$, двойственную по отношению к $\Gamma(M, \Lambda')$. Используя для $\Gamma(M, \Lambda')$ представление (57)–(60), получаем следующую формулировку задачи $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda')$:

$$- \sum_{i=1}^r d_i \mu_i \rightarrow \max \quad (62)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{\gamma_1} \alpha_i (-B + AX_i) + \sum_{i=\gamma_1+1}^{\gamma} \alpha_i AX_i - \sum_{i=1}^r \mu_i D_i = 0; \quad (63)$$

$$\sum_{i=1}^{\gamma_1} \alpha_i = 1; \quad (64)$$

$$\alpha_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, \gamma, \quad \mu_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (65)$$

Здесь $D_i = (d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{im})^T, i = 1, 2, \dots, r$.

Поскольку $X_i, i = 1, 2, \dots, \gamma$ — полный набор крайних элементов множества $G_{\Lambda'}$, условия (63)–(65) можно переписать в эквивалентном виде

$$AX - \sum_{i=1}^r \mu_i D_i = B, \quad (66)$$

$$X \in G_{\Lambda'}, \quad (67)$$

$$\mu_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (68)$$

Следовательно, задача $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda)$ сводится к максимизации линейной формы (62) при условиях (66)–(68).

Определим на множестве $G_{\Lambda'}$ функцию

$$\tilde{\varphi}(X, M) = \inf_{l \in M} (B - AX, l). \quad (69)$$

По определению $\tilde{\varphi}(X, M)$ — экстремальное значение линейной формы в задаче минимизации $(B - AX, l)$ при условиях (60). Задача, двойственная относительно данной, имеет вид

$$- \sum_{i=1}^r d_i \mu_i \rightarrow \max \quad (70)$$

при условиях

$$- \sum_{i=1}^r \mu_i D_i = B - AX, \quad (71)$$

$$\mu_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (72)$$

Учитывая совместность условий (60), получаем

$$\tilde{\varphi}(X, M) \begin{cases} -\infty, & \text{если задача (70) — (72) неразрешима;} \\ -\sum_{i=1}^r d_i \mu_i^*(X), & \text{если } (\mu_1^*(X), \dots, \mu_r^*(X)) \text{ — решение} \\ & \text{задачи (70) — (72).} \end{cases}$$

Следовательно, задача $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda')$ может быть также записана в симметричной форме: $\varphi(X, M) \rightarrow \max$ при условии $X \in G_{\Lambda'}$. Разрешимость задачи $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda')$ вытекает из разрешимости задачи $\Gamma(M, \Lambda')$.

11. Допустим, что решения l^* и X^* задач $\Gamma(M, \Lambda')$ и $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda')$ найдены. Согласно неравенству (61), могут представиться два случая: 1°. $v_0 = \varphi(l^*, \Lambda') = \tilde{\varphi}(X^*, M) = 0$; 2°. $v_0 < 0$.

Первая возможность указывает на то, что Λ' — искомая точка, в которой функция $f(\Lambda)$ достигает минимума. При этом X^* — решение исследуемой блочной задачи (1) — (4). Действительно, согласно (54), вектор $l_e = \varepsilon(AX^* - B) \in M$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$. Поэтому $0 = v_0 = \tilde{\varphi}(X^*, M) \leq (B - AX^*, l_e) = -\varepsilon |B - AX^*|^2$, т. е. $B = AX^*$. Кроме того, $X^* \in G_{\Lambda'}$. Наше утверждение вытекает из условий (36), (37) оптимальности плана блочной задачи. Пусть теперь имеет место случай 2°. Поскольку $\varphi(l^*, \Lambda') < 0$, вектор l^* — подходящее направление, выходящее из точки Λ' .

Итак, выбор подходящего направления, исходящего из точки Λ' , можно осуществлять с помощью решения взаимосопряженных задач $\Gamma(M, \Lambda')$ и $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda')$, причем многогранное множество M должно только подчиняться требованиям (54) и (55). Варьируя множество M и методы анализа задач $\Gamma(M, \Lambda)$ и $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda)$, получаем различные способы T выбора подходящего направления. Удобнее всего формировать множество M , исходя из простейших ограничений вида: $l_i \leq 1$, $l_i \geq -1$. В этом случае векторы D_i с точностью до знака совпадают с единичными векторами.

12. Задачи $\Gamma(M, \Lambda)$ и $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda)$, в результате решения которых может быть выбрано подходящее направление, выходящее из точки Λ , определяются путем фиксации множества G_{Λ} — совокупности оптимальных планов X_{Λ} -задачи (28) — (29). Очевидно, аналитически множество G_{Λ} может быть задано условиями (3) — (4) и дополнительным требованием

$$x_j = 0, \quad \text{если } \Delta_j(\Lambda) > 0, \quad (73)$$

где через $\Delta_j(\Lambda)$ обозначена оценка j -го вектора условий X_{Λ} -задачи относительно одного из ее оптимальных базисов. Заметим, что требование (73) обычно существенно облегчает анализ задач $\Gamma(M, \Lambda)$ и $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda)$.

Расширим теперь множество G_{Λ} , введя в рассмотрение многогранное множество $G_{\Lambda}(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, определяемое условиями (3) — (4) и дополнительным требованием

$$x_j = 0, \quad \text{если } \Delta_j(\Lambda) > \varepsilon, \quad (74)$$

где $\Delta_j(\Lambda)$ имеет тот же смысл, что и в соотношении (73). Отметим, что на практике попытка выделить с помощью условий (73) множество G_{Λ} приводит на самом деле к удовлетворению требований (74) при некотором достаточно малом $\varepsilon > 0$, т. е. к выделению множества $G_{\Lambda}(\varepsilon) \supset G_{\Lambda}$. Поэтому естественно рассмотреть взаимосопряженные задачи выбора подходящего направления, которые отличаются от введенных выше задач $\Gamma(M, \Lambda)$ и $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda)$ только тем, что G_{Λ} заменено на $G_{\Lambda}(\varepsilon)$.

Итак, в качестве подходящего направления, выходящего из точки Λ' , будем выбирать вектор l_{ε}' , для которого

$$\left. \begin{aligned} \varphi(l_{\varepsilon}', \Lambda', \varepsilon) &= \min_{l \in M} \varphi(l, \Lambda', \varepsilon), \\ \varphi(l, \Lambda', \varepsilon) &= \sup_{x \in G_{\Lambda'}(\varepsilon)} (B - AX, l), \quad \varepsilon \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Обозначим задачу (75) через $\Gamma(M, \Lambda', \varepsilon)$. Двойственная ей задача $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda', \varepsilon)$ состоит в максимизации линейной формы (62) при условиях (66), (68) и

$$X \in G_{\Lambda'}(\varepsilon). \quad (76)$$

Эквивалентная формулировка задачи $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda', \varepsilon)$ заключается в максимизации функции

$$\tilde{\varphi}(X, M) \quad (77)$$

$$X \in G_{\Lambda'}(\varepsilon), \quad (78)$$

где $\tilde{\varphi}(X, M)$ определяется соотношением (69). Обе приведенные формулировки задачи $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda', \varepsilon)$ могут быть обоснованы с помощью рассуждений п. 10. Очевидно, $\Gamma(M, \Lambda') = \Gamma(M, \Lambda', 0)$, $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda') = \tilde{\Gamma}(M, \Lambda', 0)$.

Пусть l_{ε}' и X_{ε}' — решения задач $\Gamma(M, \Lambda', \varepsilon)$ и $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda', \varepsilon)$ соответственно. В таком случае

$$v_0(\varepsilon) = \varphi(l_{\varepsilon}', \Lambda', \varepsilon) = \tilde{\varphi}(X_{\varepsilon}', M) \leq 0.$$

Пусть $v_0(\varepsilon) = 0$. Повторяя рассуждения п. 11, имеем

$$AX_{\varepsilon}' = B. \quad (79)$$

Используя условие (74), определяющее при $\Lambda = \Lambda'$ множество $G_{\Lambda'}(\varepsilon)$, нетрудно убедиться в справедливости оценки

$$(C_{\Lambda'}, X_{\varepsilon}') + (B, \Lambda') \geq f(\Lambda') - \alpha \cdot \varepsilon,$$

где α не зависит от Λ' и $\varepsilon \geq 0$. Но в силу (79)

$$(C_{\Lambda'}, X_{\varepsilon}') + (B, \Lambda') = (C, X_{\varepsilon}')$$

и, следовательно, $(C, X_{\varepsilon}') \geq f(\Lambda') - \alpha \cdot \varepsilon \geq (C, X^*) - \alpha \cdot \varepsilon$, где X^* — решение задачи (1) — (4). Таким образом, если в результате анализа задач $\Gamma(M, \Lambda', \varepsilon)$ и $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda', \varepsilon)$ выясняется, что $v_0(\varepsilon) = 0$, то одновременно строится план X_{ε}' задачи (1) — (4), мало отличающийся от оптимального при достаточно малом $\varepsilon > 0$. В качестве практической оценки отклонения плана X_{ε}' от оптимального целесообразно использовать очевидное соотношение

$$(C, X^*) - (C, X_{\varepsilon}') \leq f(\Lambda') - (C, X_{\varepsilon}'). \quad (80)$$

Допустим теперь, что $v_0(\varepsilon) = \varphi(l_{\varepsilon}', \Lambda', \varepsilon) < 0$. В этом случае вектор l_{ε}' — искомое подходящее направление, поскольку $\varphi(l_{\varepsilon}', \Lambda') \leq \varphi(l_{\varepsilon}', \Lambda', \varepsilon) < 0$.

Итак, способ выбора подходящего направления, основанный на решении задач $\Gamma(M, \Lambda', \varepsilon)$ и $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda', \varepsilon)$, либо приводит к построению искомого направления, либо позволяет определить план задачи (1) — (4), близкий к ее решению при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

13. Рассмотрим еще одну пару взаимосопреженных задач выбора подходящего направления, связанных с множеством $G_{\Lambda}(\varepsilon)$. Анализ этих

задач обязательно завершается выбором подходящего направления, если только множество последних непусто.

Пусть $\Lambda' \in R$, $\varepsilon \geq 0$. Введем функцию

$$\varphi_1(l, \Lambda', \varepsilon) = \sup_{X \in G_{\Lambda'}(\varepsilon)} (C_{\Lambda'+l}, X) + (B, \Lambda' + l). \quad (81)$$

В соответствии с теоремой 2

$$f(\Lambda' + l) = \varphi_1(l, \Lambda', \varepsilon), \quad (82)$$

если только $|l| \leq \delta(\Lambda')$. При $\varepsilon = 0$ радиус $\delta(\Lambda')$ окрестности, в пределах которой соблюдается равенство (82), может быть сколь угодно малым. Если же $\varepsilon > 0$, то, как будет показано ниже (см. лемму 1 в п. 25), равенство (82) имеет место в некоторой окрестности Λ' , размер которой не зависит от точки Λ' .

Через $\Gamma_1(M, \Lambda', \varepsilon)$ обозначим задачу, состоящую в минимизации функции (81) по точкам $l \in M$. Рассуждения, аналогичные проведенным в п. 10, позволяют записать задачу $\tilde{\Gamma}_1(M, \Lambda', \varepsilon)$, двойственную к $\Gamma_1(M, \Lambda', \varepsilon)$, в следующих двух эквивалентных формах

$$1. (C_{\Lambda'}, X) - \sum_{i=1}^r \mu_i d_i \rightarrow \max, \quad (83)$$

$$AX - \sum_{i=1}^r D_i \mu_i = B, \quad (84)$$

$$X \in G_{\Lambda'}(\varepsilon), \quad \mu_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (85)$$

$$2. \tilde{\varphi}_1(X, M) \rightarrow \max, \quad (86)$$

$$X \in G_{\Lambda'}(\varepsilon), \quad (87)$$

$$\text{где } \tilde{\varphi}_1(X, M) = \inf_{l \in M} [(C_{\Lambda'+l}, X) + (B, \Lambda' + l)]. \quad (88)$$

Поскольку $(C_{\Lambda'}, X) = \text{const}$ при $X \in G_{\Lambda'}$, задачи $\Gamma_1(M, \Lambda', 0)$, $\tilde{\Gamma}_1(M, \Lambda', 0)$ эквивалентны задачам $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda')$ и $\Gamma(M, \Lambda')$ соответственно. Таким образом, задачи выбора подходящего направления, рассмотренные в данном и предыдущем пунктах, совпадают при $\varepsilon = 0$. Однако при $\varepsilon > 0$ эквивалентность этих задач нарушается.

Если l' и X' — решения задач $\Gamma_1(M, \Lambda', \varepsilon)$ и $\tilde{\Gamma}_1(M, \Lambda', \varepsilon)$, то $v_0^{(1)}(\varepsilon) = \varphi_1(l', \Lambda', \varepsilon) = \tilde{\varphi}_1(X', M) \leq \varphi_1(0, \Lambda', \varepsilon)$. Возможны два случая: 1°. $v_0^{(1)}(\varepsilon) = \varphi_1(0, \Lambda', \varepsilon)$; 2°. $v_0^{(1)}(\varepsilon) < \varphi_1(0, \Lambda', \varepsilon)$. В первом случае Λ' — искомый минимум функции $f(\Lambda)$, X' — решение задачи (1) — (4). Действительно, при достаточно малом $\delta > 0$ вектор $l_0 = \delta(AX' - B) \in M$. Следовательно, $\varphi_1(0, \Lambda', \varepsilon) = f(\Lambda') = \tilde{\varphi}_1(X', M) \leq f(\Lambda') + (B - AX', l_0) = f(\Lambda') - \delta|B - AX'|^2$. Полученные соотношения возможны только при

$$\text{Далее} \quad AX' = B. \quad (89)$$

$$f(\Lambda') = \tilde{\varphi}_1(X', M) = (C, X'). \quad (90)$$

Равенства (89) и (90) доказывают наше утверждение.

Если же имеет место случай 2°, то l' является подходящим направлением. В самом деле, из выпуклости вниз функции $\varphi_1(l, \Lambda', \varepsilon)$ при любом

$0 < \delta < 1$ имеем $\varphi_1(\delta l', \Lambda', \varepsilon) \leq \delta \varphi_1(l', \Lambda', \varepsilon) + (1 - \delta) \varphi_1(0, \Lambda', \varepsilon) < \varphi_1(0, \Lambda', \varepsilon)$. С другой стороны, при достаточно малом $\delta > 0$, согласно (82), $f(\Lambda' + \delta l') = \varphi_1(\delta l', \Lambda', \varepsilon) < \varphi_1(0, \Lambda', \varepsilon) = f(\Lambda')$, т. е. l' — действительно подходящее направление.

Итак, в результате решения задач $\Gamma_1(M, \Lambda', \varepsilon)$ и $\tilde{\Gamma}_1(M, \Lambda', \varepsilon)$, $\varepsilon \geq 0$ либо отыскивается подходящее (применительно к точке Λ') направление, либо строится оптимальный план задачи (1) — (4).

14. Анализ задач выбора подходящего направления ($\Gamma(M, \Lambda', \varepsilon)$, $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda', \varepsilon)$ или $\Gamma_1(M, \Lambda', \varepsilon)$, $\tilde{\Gamma}_1(M, \Lambda', \varepsilon)$) можно проводить различными путями. Ниже мы остановимся на трех методах решения этих задач. Для упрощения обозначений методы будут излагаться применительно к задачам $\Gamma(M, \Lambda') = \Gamma(M, \Lambda', 0) = \Gamma_1(M, \Lambda', 0)$, $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda') = \tilde{\Gamma}_1(M, \Lambda', 0) = \tilde{\Gamma}_1(M, \Lambda', 0)$, хотя все сказанное без каких бы то ни было изменений переносится на случай $\varepsilon > 0$.

Один из возможных методов решения задач $\Gamma(M, \Lambda')$ и $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda')$ связан с непосредственной минимизацией функции $\varphi(l, \Lambda')$ при $l \in M$. Реализация этого метода почти ничем не отличается от процесса решения блочной задачи (1) — (4), описанного в разделе II. Разница состоит лишь в том, что в данном случае $C = 0$, $G = G_{\Lambda'}$ и кроме гиперплоскостей, порождаемых вершинами и неограниченными ребрами множества $G_{\Lambda'}$, необходимо

учитывать гиперплоскости $\sum_{j=1}^m d_{ij} l_j = d_i$, отвечающие множеству M .

При использовании этого метода целесообразно в качестве M выбрать куб $|l_i| \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, m$, для которого, очевидно, условия (54), (55) соблюдаются. В предположении ограниченности множества $G_{\Lambda'}$ функция $\varphi(l, \Lambda')$ определена для любого l . Следовательно, произвольная вершина, например $l^{(0)} = (-1, -1, \dots, -1)$, может быть принята в качестве начальной точки в процессе минимизации функции $\varphi(l, \Lambda')$. В данном случае исходная матрица (44) имеет вид $(e_1, e_2, \dots, e_m, Q)^{-1}$, где e_i — единичный вектор $(m+1)$ -мерного пространства с единицей на i -м месте; $Q = (AX_0 - B, 1)^T$; X_0 — одна из вершин $G_{\Lambda'}$, на которой достигается максимум линейной формы $-(l^{(0)}A, X)$ при $X \in G_{\Lambda'}$.

15. Другой метод анализа задач $\Gamma(M, \Lambda')$ и $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda')$ связан с максимизацией функции $\varphi(X, M)$, т. е. с непосредственным решением задачи $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda')$.

В данном случае задачу $\Gamma(M, \Lambda')$ удобно представить в форме (62), (66) — (68). Решение этой задачи производится с помощью метода разложения Данцига — Вульфа, причем разделение условий задачи на две группы фиксируется соотношениями (66) и (67). Остановимся на вопросе о рациональном выборе многогранного множества M , облегчающем поиск начального приближения при решении задачи $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda')$ методом разложения.

Пусть $I(\Lambda')$ — множество номеров v всех тех крайних элементов X_v , которые участвуют в образовании множества $G_{\Lambda'}$. Используя обозначения, принятые при записи задачи (5) — (7), можно представить задачу $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda')$, определяемую соотношениями (62) — (65), в следующем эквивалентном виде

$$-\sum_{i=1}^r d_i \mu_i \rightarrow \max \quad (91)$$

при условиях

$$\sum_{v \in I(\Lambda')} z_v \bar{P}_v - \sum_{i=1}^r \mu_i \bar{D}_i = \bar{B}, \quad (92)$$

$$z_v \geq 0, \quad \mu_i \geq 0. \quad (93)$$

(Здесь $\bar{D}_i = \begin{pmatrix} D_i \\ 0 \end{pmatrix}$).

Допустим, что нам известна одна из точек $X = \sum_{v \in I(\Lambda')} z_v' X_v$ множества $G_{\Lambda'}$, которой отвечает вектор

$$\bar{P} = \sum_{v \in I(\Lambda')} z_v' \bar{P}_v.$$

Вычислим вектор $\bar{P} - \bar{B}$. Положим $\bar{D}_i = (-1)^{\delta_i} e_i$, $i = 1, 2, \dots, r = m$, где e_i — единичный вектор с единицей на i -м месте,

$\delta_i = \begin{cases} 0, & \text{если } i\text{-я компонента вектора } \bar{P} - \bar{B} \text{ неотрицательна;} \\ 1, & \text{если } i\text{-я компонента вектора } \bar{P} - \bar{B} \text{ отрицательна.} \end{cases}$

Очевидно, при таком выборе векторов $\bar{D}_i$ условия (92), (93) совместны, т. е. многогранное множество M удовлетворяет требованию (55). Кроме того, если $d_i = 1$ для всех i , то соблюдается также условие (54). При этом соотношения (92) переходят в систему уравнений

$$\sum_{v \in I(\Lambda')} z_v \bar{P}_v - \sum_{i=1}^m \mu_i \bar{D}_i = \bar{B}. \quad (94)$$

Итак, решение задачи $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda')$ при выбранном множестве M сводится к минимизации линейной формы

$$\sum_{i=1}^m \mu_i \quad (95)$$

при условиях (93) и (94).

Допустим, что $\bar{P} = \bar{P}_{v_0}$ при некотором v_0 , т. е. точка $X = X_{v_0}$ — вершина множества $G_{\Lambda'}$. Векторы $\bar{P}_{v_0}, -\bar{D}_1, -\bar{D}_2, \dots, -\bar{D}_m$ составляют базис опорного плана задачи (93) — (95), который можно принять за исходный. Очевидно, матрица, обратная матрице этого базиса, вычисляется без труда.

Как мы увидим ниже, иногда в результате предыдущих этапов решения блочной задачи определяется такой вектор $\bar{P}$, что

$$\bar{P} = \sum_{\alpha=1}^t z_{v_\alpha}' \bar{P}_{v_\alpha}, \quad v_\alpha \in I(\Lambda'), \quad \bar{P} - \bar{B} = \sum_{\alpha=1}^{m+1-t} \mu_{i_\alpha}' \bar{D}_{i_\alpha},$$

причем векторы $\bar{P}_{v_1}, \bar{P}_{v_2}, \dots, \bar{P}_{v_t}, \bar{D}_{i_1}, \dots, \bar{D}_{i_{m+1-t}}$ составляют базис плана задачи (93) — (95) с известной обратной матрицей. Естественно, такой базис может быть также принят за исходный. В данном случае M определяется векторами $\bar{D}_{i_\alpha}$ и числами $d_{i_\alpha} = 1$, $\alpha = 1, 2, \dots, m+1-t$.

16. Способы выбора возможных направлений, описанные в п. 14, 15, связаны либо с минимизацией функции $\varphi(l, \Lambda')$ на множестве M , либо с максимизацией функции $\varphi(X, M)$ на множестве $G_{\Lambda'}$. Все они основаны на конечных методах линейного программирования. Рассмотрим еще один путь выбора возможных направлений, базирующийся на итерационном процессе решения игр, предложенном Брауном [5]. При использовании этого метода исходят из произвольных векторов $k^{(1)} \in M$ и $X^{(1)} \in G_{\Lambda'}$ и получают,

вообще говоря, бесконечные последовательности векторов, сходящиеся к решениям задач $\Gamma(M, \Lambda')$ и $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda')$.

Пусть $l^{(k)}$ и $X^{(k)}$ — k -е элементы данных последовательностей. Опишем порядок действий, в результате которых вычисляются векторы $X^{(k+1)}$ и $l^{(k+1)}$, предполагая, что множества M и $G_{\Lambda'}$ ограничены.

Рассмотрим задачу линейного программирования

$$(l^{(k)}A, X) \rightarrow \min \quad (96)$$

при условиях

$$X \in G_{\Lambda'}, \quad (97)$$

алгебраическая запись которых имеет вид (3), (4), (73). Пусть $\tilde{X}^{(k+1)}$ — произвольное опорное решение задачи (96), (97). Положим

$$X^{(k+1)} = \frac{1}{k+1} \tilde{X}^{(k+1)} + \frac{k}{k+1} X^{(k)}. \quad (98)$$

Чтобы определить новое направление $l^{(k+1)}$, решим задачу линейного программирования

$$(B - AX^{(k+1)}, l) \rightarrow \min \quad (99)$$

при условиях

$$l \in M. \quad (100)$$

Если $l^{(k+1)}$ — некоторый оптимальный опорный план задачи (99), (100), то положим

$$l^{(k+1)} = \frac{1}{k+1} \tilde{l}^{(k+1)} + \frac{k}{k+1} l^{(k)}. \quad (101)$$

Многогранник M целесообразно выбирать возможно более простой структуры. Например, в качестве M можно взять m -мерный куб:

$$|l_i| \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (102)$$

Очевидно, решение задачи (99), (100) для случая, когда M имеет вид (102), определяется без труда. Поэтому основная трудоемкость отдельного шага падает на анализ задачи (96), (97).

Нетрудно убедиться, что в предположении ограниченности множеств $G_{\Lambda'}$ и M справедливы соотношения

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(l^{(k)}, \Lambda') = \min_{l \in M} \varphi(l, \Lambda'), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\varphi}(X^{(k)}, M) = \max_{X \in G_{\Lambda'}} \tilde{\varphi}(X, M). \quad (103)$$

Для этого следует привести задачу об отыскании седловой точки функции $(B - AX, l)$ при $X \in G_{\Lambda'}$, $l \in M$ к прямоугольной игре, представив многогранники $G_{\Lambda'}$ и M в виде совокупностей выпуклых комбинаций их вершин, а затем воспользоваться результатом Робинсон [6], устанавливающим сходимость метода Брауна.

Из вычислительной практики использования метода Брауна известно, что этот метод позволяет достаточно быстро получить грубое приближение оптимальных стратегий, после чего его сходимость обычно резко замедляется. Указанная особенность, присущая всем известным итерационным методам игр, дает основание для следующей рекомендации. Описанный здесь итерационный метод выбора подходящих направлений целесообразно использовать в начале процесса решения блочной задачи, когда величина $\min_{l \in M} \varphi(l, \Lambda')$ достаточно мала. В этом случае при сравнительно небольших значениях k величина $\varphi(l^{(k)}, \Lambda')$ станет отрицательной, а направление $l^{(k)}$ — подходящим.

В процессе вычислительных экспериментов по использованию метода Брауна для прямоугольных игр было замечено [7], что обычно в достаточно длинном ряде последовательных итераций оптимальный ответ любого из игроков на текущую стратегию противника остается неизменным. В связи с этим в [7] описан алгоритм, позволяющий заменять каждый из этих рядов одной итерацией, которая по трудоемкости лишь незначительно превосходит обычную итерацию метода Брауна. Предложенная модификация метода Брауна существенно убыстряет его сходимость. Естественно ожидать, что подмеченная в [7] особенность метода Брауна имеет место и при использовании его для анализа задач выбора подходящего направления. Поэтому целесообразно применять для решения задач $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda')$ и $\Gamma(M, \Lambda')$ модификацию изложенного выше итерационного метода, учитывающую эту особенность. Приведем описание соответствующего алгоритма.

Результаты k -й итерации модифицированного метода являются векторы $X^{(k)}$, $l^{(k)}$ и число $S(k)$ — количество шагов обычного метода, эквивалентное k шагам модифицированного метода.

Пусть $X^{(k+1)}$ и $l^{(k+1)}$ — некоторые опорные решения задач (96)–(97) и (99)–(100) соответственно, причем в (99) вектор $X^{(k+1)}$ заменен на

$$\bar{X}^{(k+1)} = \frac{1}{S(k)+1} X^{(k+1)} + \frac{S(k)}{S(k)+1} X^{(k)}.$$

Введем в рассмотрение параметрические задачи:

$$(l^{(k)}A + \theta(l^{(k+1)} - l^{(k)})A, X) \rightarrow \min \quad (104)$$

при условии (97) и

$$(B - A\bar{X}^{(k+1)} + \theta A(\bar{X}^{(k+1)} - X^{(k+1)}), l) \rightarrow \min \quad (105)$$

при условии (100). Здесь $0 \leq \theta \leq 1$. Пусть θ_1 и θ_2 — максимальные значения параметра $\theta \leq 1$, при которых векторы $X^{(k+1)}$ и $l^{(k+1)}$ являются еще решениями задач (104), (97) и (105), (100) соответственно. Величины θ_1 и θ_2 определяются с помощью известных приемов параметрического программирования. Если $\theta_1 = \theta_2 = 1$, векторы $X^{(k+1)}$ и $l^{(k+1)}$ являются искомыми решениями задач $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda')$ и $\Gamma(M, \Lambda)$ соответственно. Предположим, что $\min\{\theta_1, \theta_2\} < 1$. Пусть $l_1 \geq 0$ — максимально возможное целое число, для которого $l_1 / (S(k) + l_1) \leq \theta_1$; l_2 — наибольшее целое число, для которого $l_2 / (S(k) + l_2) \leq \theta_2$. (Условимся считать $l_i = \infty$, если $\theta_i = 1$, $i = 1, 2$). Положим $l = \min\{l_1, l_2\} + 1$. Векторы $X^{(k+1)}$, $l^{(k+1)}$ и число $S(k+1)$ определяются из соотношений.

$$X^{(k+1)} = \alpha \bar{X}^{(k+1)} + (1 - \alpha) X^{(k)}; \quad l^{(k+1)} = \alpha l^{(k+1)} + (1 - \alpha) l^{(k)}; \quad (106)$$

$$\alpha = l / (S(k) + l); \quad S(k+1) = S(k) + l.$$

Эффективность изложенной модификации тем больше, чем быстрее растет величина $S(k)$ с ростом k .

Преимущество итерационного метода по сравнению с конечными методами выбора подходящих направлений состоит в том, что при его использовании отпадает необходимость в фиксации и преобразовании матрицы порядка $m+1$, порождаемой векторами $\bar{P}_v$ и $\bar{D}_i$. Однако после того, как точка Λ' окажется в некоторой близости от искомой точки минимума функции $f(\Lambda)$, отмеченное преимущество итерационного метода не сможет компенсировать существенное замедление его сходимости.

Таким образом, наиболее эффективным представляется совместное использование конечных и итерационных способов выбора подходящих направлений. В начале процесса решения блочной задачи следует отдать предпочтение итерационному способу. После того, как будет обнаружено замедление сходимости этого способа, целесообразно перейти к одному из конечных способов, изложенных в п. 14, 15.

Совокупность действий, необходимых для перехода от точки $\Lambda' \in R$ к новой точке $\Lambda'' \in R$, назовем *большой итерацией* метода блочного программирования. Мы рассмотрели несколько реализаций первого этапа большой итерации, состоящего в выборе подходящего направления.

Каждая из этих реализаций требует решения нескольких вспомогательных задач линейного программирования с условиями (3), (4), (73). Последние отличаются от условий (3), (4) только тем, что часть (обычно большая часть) переменных задачи заранее полагаются равными нулю.

IV. СПОСОБЫ ВЫБОРА ДЛИНЫ ШАГА

17. Перейдем к описанию второго этапа большой итерации — выбора величины сдвига вдоль подходящего направления.

Итак, пусть l' — подходящее для точки Λ' направление. На втором этапе точка Λ' заменяется на $\Lambda'' = \Lambda(\theta') = \Lambda' + \theta'l'$. Выбор параметра θ' осуществляется с помощью алгоритма параметрического программирования (см. [3], гл. 8).

Рассмотрим параметрическую задачу, состоящую в максимизации линейной формы

$$(C - (\Lambda' + \theta'l')A, X) = (C' + \theta C'', X) \quad (107)$$

при условиях

$$X \in G. \quad (108)$$

Пусть

$$g(\theta) = \sup_{X \in G} (C' + \theta C'', X) + \theta(l', B). \quad (109)$$

Очевидно, $f(\Lambda' + \theta l') = g(\theta) + (\Lambda', B)$. Функция $g(\theta)$ представляет собой кусочно-линейную выпуклую вниз функцию. В силу выбора направления l' при достаточно малых положительных значениях аргумента функция $g(\theta)$ убывает с ростом θ .

Применим для анализа задачи (107), (108) при $\theta \geq 0$ метод параметрического программирования. Процесс анализа задачи может завершиться одним из следующих исходов.

1°. Получено максимальное критическое значение, правее которого функция $g(\theta)$ не убывает.

2°. Получен опорный план $\bar{X}$, оптимальный для задачи (107), (108) при $\theta \geq \theta_1$, причем $(C'', \bar{X}) + (l', B) < 0$, т. е. $g(\theta)$ убывает на всей положительной полуоси.

В первом случае сдвигаемся в точку $\Lambda'' = \Lambda' + \theta'l'$ и переходим к следующей итерации. Заметим, что положительность θ' гарантирует справедливость неравенства

$$f(\Lambda'') < f(\Lambda'). \quad (110)$$

Во втором случае делаем вывод о несовместности условий (2) — (4) исследуемой задачи, поскольку $\inf_{\Lambda \in R} f(\Lambda) \leq \inf_{\theta \geq 0} g(\theta) = -\infty$.

Обозначим через $E_{\min}$ изложенный способ выбора θ' , связанный с минимизацией функции $g(\theta)$. Способ $E_{\min}$ целесообразно применять в итерациях начальной стадии процесса решения задачи, когда мы еще достаточно далеки от минимума функции $f(\Lambda)$. На этой стадии решения преимущество способа $E_{\min}$, состоящее в достаточно быстром убывании функции $f(\Lambda)$ на каждой итерации, компенсирует его недостаток — сложность использования информации, накопленной при выборе подходящего направления на предыдущей итерации. Отмеченный недостаток проявляется в том случае, когда выбор подходящего направления осуществляется с помощью одного из конечных способов. При использовании способа $E_{\min}$ начальный базис задачи выбора подходящего направления формируется заново (содержит m единичных векторов), что замедляет процесс поиска подходящего направления.

18. По мере приближения к искомому минимуму функции $f(\Lambda)$ величина, на которую уменьшается ее значение при переходе от точки Λ' к точке Λ'' , сокращается. Кроме того, на заключительной стадии процесса решения задачи целесообразно чаще пересчитывать подходящее направление. Поэтому здесь особенно важно использовать такой способ выбора θ' ,

который, хотя и не минимизирует $f(\Lambda)$ вдоль выбранного направления, однако приводит к хорошему первому приближению для последующей задачи определения подходящего направления. Отмеченным требованиям удовлетворяет способ E_0 , состоящий в следующем.

В качестве θ' принимается минимальное положительное критическое значение параметра θ в задаче (107), (108) (если, конечно, оно существует).

Если же параметр в задаче (107), (108) не имеет критических значений на луче $(0, \infty)$, т. е. $g(\theta)$ — убывающая линейная функция θ на положительной полуоси, то фиксируется несовместность условий задачи (1) — (4).

Допустим, что в заключительный базис задачи (91) — (93) выбора подходящего направления для точки Λ' входят векторы $\bar{P}_{s_1}, \bar{P}_{s_2}, \dots, \bar{P}_{s_d}$ и θ' — первое положительное критическое значение параметра θ . Это значит, что точки $\bar{\Lambda}(\theta) = (\Lambda' + \theta l', f(\Lambda' + \theta l'))$, $0 \leq \theta \leq \theta'$, расположенные на поверхности (25), принадлежат гиперплоскостям H_{s_i} , $i = 1, 2, \dots, d$, которые порождаются векторами $X_{s_1}, X_{s_2}, \dots, X_{s_d}$ (вершинами или направляющими векторами неограниченных ребер множества $G_{\Lambda'}$).

Поэтому $\bar{P}_{s_1}, \bar{P}_{s_2}, \dots, \bar{P}_{s_d}$ являются векторами условий задачи (91) — (93) не только для точки Λ' , но и для точки Λ'' . Другими словами, заключительный базис задачи (91) — (93) для точки Λ' может быть принят в качестве начального базиса этой задачи для точки Λ'' . Подчеркнем, что приведенные соображения относятся к способам выбора подходящего направления, основанным на максимизации функции $\tilde{\varphi}(X, M)$. Возможность полного использования информации, накопленной на предыдущих итерациях, — важное достоинство этих способов.

Пусть X_v — вершина множества $G_{\Lambda'}$, породившая вектор $\bar{P}_v$, который вошел в оптимальный базис задачи (91) — (93). Очевидно, X_v — решение задачи (107) — (108) для $0 \leq \theta \leq \theta'$. Следовательно, в невырожденном случае искомое значение θ' будет найдено на первом же шаге анализа задачи (107) — (108), если только принять X_v за начальный план. Удобно брать в качестве X_v оптимальный план последней вспомогательной задачи, сформированной в процессе выбора подходящего направления.

19. Способ E_0 выбора длины шага вдоль заданного направления описан в предыдущем пункте применительно к случаю $\varepsilon = 0$. Если при выборе подходящего направления решаются задачи $\Gamma(M, \Lambda', \varepsilon)$ и $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda', \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, то аналогом E_0 следует считать способ $E_0(\varepsilon)$, состоящий в следующем. В качестве θ' принимается наибольшее значение параметра θ , для которого еще соблюдается условие

$$\frac{f(\Lambda' + \theta l') - f(\Lambda')}{\theta} \leq v_0(\varepsilon). \quad (111)$$

Если (111) имеет место для любого $0 \leq \theta < \infty$ (т. е. $\theta' = \infty$), то, очевидно, $\inf_{\Lambda \in R} f(\Lambda) = -\infty$, поскольку $v_0(\varepsilon) < 0$. Следовательно, условия (2) — (4) исследуемой блочной задачи противоречивы.

Допустим, что (111) ограничивает изменение θ , т. е. $\theta' < \infty$. Величина θ' заведомо положительна: при достаточно малых значениях $\theta > 0$ существует такой $X \in G_{\Lambda'}$, что

$$\frac{f(\Lambda' + \theta l') - f(\Lambda')}{\theta} = -(l'A, X) + (B, l') \leq v_0 \leq v_0(\varepsilon).$$

Следовательно, $f(\Lambda'') = f(\Lambda' + \theta'l') \leq f(\Lambda') + v_0(\epsilon)\theta' < f(\Lambda')$. При использовании способа $E_0(\epsilon)$ заключительный базис задачи (91)–(93) выбора подходящего направления для точки Λ' может быть принят в качестве начального базиса этой задачи для точки Λ'' . Этот вывод основывается на следующих рассуждениях. Пусть X_v — вершина множества G , порождающая вектор P_v , который входит в заключительный базис. Допустим, что

$$(C_{\Lambda'}, X_v) \geq f(\Lambda') - (B, \Lambda') - \delta, \quad \delta \geq 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} (C_{\Lambda' + \theta'l'}, X_v) &= (C_{\Lambda'}, X_v) - \theta'(P_v, l') = \\ &= (C_{\Lambda'}, X_v) + \theta'l'_{m+1} \geq f(\Lambda') - \delta + \theta'[l'_{m+1} + (B, l')] - \\ &- (B, \Lambda' + \theta'l') = f(\Lambda') - \delta + \theta'v_0(\epsilon) - (B, \Lambda' + \theta'l') \geq \\ &\geq f(\Lambda' + \theta'l') - \delta - (B, \Lambda' + \theta'l'). \end{aligned} \quad (112)$$

Предположим теперь, что P_v порождается направляющим вектором X_v неограниченного ребра множества G . В таком случае $(C_{\Lambda' + \theta'l'}, X_v) = (C_{\Lambda'}, X_v) - \theta'(P_v, l') = (C_{\Lambda'}, X_v)$. Таким образом, если элемент X_v , порождающий вектор P_v заключительного базиса задачи (91)–(93) для точки Λ' , «принадлежит» множеству $G_{\Lambda'}$ с точностью до « δ » (имеет место (112) для X_v -вершины и $(C_{\Lambda'}, X_v) \geq -\delta$ для X_v -направляющего вектора), то этим свойством он обладает и применительно к множеству $G_{\Lambda''} = G_{\Lambda' + \theta'l'}$. Следовательно, выбирая подходящее направление путем максимизации функции $\tilde{f}(X, M)$, определяя θ' способом $E_0(\epsilon)$ и принимая заключительный базис задачи $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda', \epsilon)$ в качестве исходного в задаче $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda'', \epsilon)$, можно быть уверенным, что полученный в результате план X -задачи (1)–(4) отличается от оптимального (по значению линейной формы (1)) не более, чем на $\alpha\epsilon$, где $\alpha = \text{const}$.

При выборе подходящего направления с помощью решения задачи $\Gamma_1(M, \Lambda', \epsilon)$ отмеченная преемственность соседних задач имеет место при любом способе определения θ' . Именно, каково бы ни было θ' , заключительный базис задачи $\tilde{\Gamma}_1(M, \Lambda', \epsilon)$ может быть принят в качестве исходного для задачи $\tilde{\Gamma}_1(M, \Lambda'', \epsilon)$. Это, возможно, лишь несколько увеличит число переменных в Z -задаче, отвечающей задаче $\tilde{\Gamma}_1(M, \Lambda'', \epsilon)$.

V. РАЗЛИЧНЫЕ СХЕМЫ БЛОЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

20. Рассмотренные способы выбора подходящего направления и определения величины сдвига вдоль него порождают целый класс методов блочного программирования. Как уже отмечалось, наиболее эффективным представляется комбинированное использование различных способов T и E в пределах одного процесса. В начале процесса решения блочной задачи целесообразно применять итеративный способ выбора подходящего направления l' (п. 16) и двигаться вдоль l' до тех пор, пока минимизируемая функция продолжает убывать (способ $E_{\min}$). По мере приближения к искомому минимуму функции $f(\Lambda)$ сходимость итеративного процесса обычно замедляется. Обнаружив это, следует перейти к одному из конечных методов выбора подходящего направления. На последней стадии решения предпочтительнее определять длину шага θ' способом $E_0(E_0(\epsilon))$. При использовании способа E_0 удобней всего выбирать подходящее направление с помощью максимизации функции $\tilde{f}(X, M)$. Как уже отмечалось, в этом случае можно брать в качестве начального плана задачи выбора подходящего направления для точки Λ'' оптимальный план аналогичной задачи для предшествующей точки Λ' .

Предложенная схема отличается от обычных приемов, используемых в линейном программировании, большей гибкостью, что дает возможность приспособить ее к особенностям данной задачи (или к специфике данного класса задач) непосредственно в процессе решения. Более простыми в логическом отношении, хотя и менее эффективными, являются схемы блочного программирования, которые в течение всего процесса решения используют фиксированные способы T и E . К таким схемам относятся, например, двойственный аналог метода разложения (раздел II), в котором возможные направления выбираются среди проекций ребер, исходящих из некоторой вершины многогранного множества $\bar{R}$.

В этом методе длина шага определяется с помощью способа E_0 . При использовании двойственного аналога метода разложения Z -задача (5) — (7) решается методом уточнения оценок.

Если выбирать возможное направление l путем непосредственного решения задачи $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda')$, причем множество M задавать простейшими условиями вида $l_i \geq -1$, $i = 1, 2, \dots, m$, и определять длину шага на основе способа E_0 , то приходим к методу блочного программирования, являющемуся аналогом метода сокращения невязок. Этот метод связан с решением Z -задачи (5) — (7) методом сокращения невязок. Если вспомнить, что метод разложения Данцига — Вулфа представляет собой метод улучшения плана, примененный к Z -задаче, то вместе с отмеченными только что схемами блочного программирования все три метода могут рассматриваться как обобщение трех известных конечных алгоритмов линейного программирования.

В двух последующих пунктах мы опишем блочный аналог четвертого конечного метода линейного программирования — метода двусторонних оценок. Таким образом, изложенный в этой работе подход позволяет, в частности, распространить на блочную задачу все четыре группы конечных методов линейного программирования.

21. В некоторых случаях, кроме точки $\Lambda' \in R$, для которой $f(\Lambda') < \infty$, известен также один из базисов Z -задачи (5) — (7).

В таком положении мы оказываемся, например, при использовании метода блочного программирования, связанного с выбором подходящего направления на основе решения задач $\Gamma(M, \Lambda, \varepsilon)$ и $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda, \varepsilon)$.

Если $\varepsilon > 0$, определяющее множества $G_\Lambda(\varepsilon)$, недостаточно мало, то план задачи (1) — (4), полученный в результате применения этого метода, может быть далек от оптимального и, следовательно, должен быть подвергнут улучшению. Однако теперь уже в нашем распоряжении имеется не только точка $\Lambda' \in R$, но и базис плана Z -задачи, отвечающего найденному плану задачи (1) — (4). В приводимом ниже методе блочного программирования движение к оптимуму связано с минимизацией функции $f(\Lambda)$ и одновременным улучшением имеющегося плана. Геометрическая сущность этого метода состоит в следующем. Среди гиперплоскостей, порождающих многогранное множество $\bar{R}$, выбираются те, которые либо имеют общие точки с множеством $\bar{R}$ в некоторой фиксированной окрестности точки $\bar{\Lambda}' = (\Lambda', f(\Lambda'))$, либо отвечают векторам имеющегося базиса Z -задачи.

Выбранные гиперплоскости порождают многогранное множество $\bar{R}(\Lambda', P_X, \varepsilon) \supset \bar{R}$, где P_X — базис Z -задачи, соответствующий плану X задачи (1) — (4); $\varepsilon \geq 0$ определяет окрестность точки Λ' .

Далее разыскивается наименьшая точка $(\Lambda', f(\hat{\Lambda}'))$ множества $\bar{R}(\Lambda', P_X, \varepsilon)$, которой отвечает некоторый новый базис $P_{X'}$ задачи (5) — (7).

Если $f(\Lambda') > (C, X')$, то вектор $l' = \hat{\Lambda}' - \Lambda'$ определяет направление убывания функции $f(\Lambda)$. Сдвигаясь вдоль этого направления, получаем

новую точку Λ'' . Переход от точки Λ' и базиса P_X к новой паре Λ'', P_X составляет большую итерацию метода.

22. Изложим метод подробнее. Итак, допустим, что нам известны точка Λ' и базис P_X опорного плана задачи (5) — (7), соответствующего плану X исходной задачи. Точка Λ' определяет множество $G_{\Lambda'}(\epsilon)$, которое, как мы знаем, задается условиями (3) — (4) и дополнительным ограничением $x_j = 0$, если $\Delta_j(\Lambda') > \epsilon$, где $\Delta_j(\Lambda')$ — оценки векторов условий $X_{\Lambda'}$ -задачи относительно некоторого ее оптимального базиса.

Пусть $\bar{Y} = (Y, y_{m+1}) = (y_1, y_2, \dots, y_m, y_{m+1})$ — вектор оценок условий Z -задачи относительно базиса P_X .

Составим $Y(\Lambda', \epsilon)$ -задачу, заключающуюся в максимизации линейной формы $(C - YA, X)$ при условиях $X \in G_{\Lambda'}(\epsilon)$. Согласно правилам метода разложения, в результате решения $Y(\Lambda', \epsilon)$ -задачи определяется вектор $\bar{P}_v$ для включения в базис P_X либо выясняется, что дальнейшее увеличение линейной формы (1) за счет использования векторов, отвечающих множеству $G_{\Lambda'}(\epsilon)$, невозможно.

Последнее имеет место при соблюдении неравенства

$$(C - YA, X^*) \leq y_{m+1}, \quad (113)$$

где X^* — решение $Y(\Lambda', \epsilon)$ -задачи.

В первом случае базис P_X преобразуется, и составляется новая $Y'(\Lambda', \epsilon)$ -задача, с которой производится та же операция, что и с предыдущей. Через несколько шагов мы приходим к $Y^{(k)}(\Lambda', \epsilon)$ -задаче, для которой соблюдается неравенство (113). Эта задача порождается вектором $\bar{Y}^{(k)} = (Y^{(k)}, y_{m+1}^{(k)})$.

Пусть $\hat{\Lambda}' = Y^{(k)}$, X' — план задачи (1) — (4), отвечающий последнему базису Z -задачи. Очевидно,

$$(C, X') = y_{m+1}^{(k)} + (\hat{\Lambda}', B). \quad (114)$$

Учитывая неравенство (113) при $\bar{Y} = Y^{(k)} = \Lambda'$ и соотношение (114), получаем

$$\max_{X \in G_{\Lambda'}(\epsilon)} (C - \Lambda'A, X) + (\hat{\Lambda}', B) \leq (C, X'). \quad (115)$$

Если $f(\Lambda') = (C, X')$, то, как известно, Λ' — искомый минимум функции $f(\Lambda)$, а X' — решение задачи (1) — (4).

Если же

$$f(\Lambda') > (C, X'), \quad (116)$$

то легко проверить, что вектор $l' = \hat{\Lambda}' - \Lambda'$ определяет направление убывания функции $f(\Lambda)$. Действительно,

$$\left. \frac{df(\Lambda)}{dl'} \right|_{\Lambda=\Lambda'} = \sup_{X \in G_{\Lambda'}} (B - AX, l') = \sup_{X \in G_{\Lambda'}} (C - \hat{\Lambda}'A, X) + (\hat{\Lambda}', B) - f(\Lambda').$$

Учитывая далее неравенство (115) и включение $G_{\Lambda'} \subset G_{\Lambda'}(\epsilon)$, имеем

$$\left. \frac{df(\Lambda)}{dl'} \right|_{\Lambda=\Lambda'} \leq (C, X') - f(\Lambda') < 0.$$

Таким образом, при наличии неравенства (116) можно уменьшить значение функции $f(\Lambda)$, двигаясь вдоль направления $l' = \hat{\Lambda}' - \Lambda'$.

Это движение, как обычно, осуществляют с помощью метода параметрического программирования, отправляясь от известного оптимального

плана $X_{\Lambda'}$ -задачи. Выбор длины шага вдоль направления l' можно производить либо на основе способа E_0 (двигаться до первого положительного критического значения функции $f(\Lambda' + \theta l')$), либо с помощью способа $E_{\min}$ (двигаться до тех пор, пока функция $f(\Lambda' + \theta l')$ продолжает убывать). Отметим, что в данном методе длина шага всегда конечна, поскольку для любого Λ $f(\Lambda) \geq (C, X)$, где X — исходный план задачи (1) — (4). Пусть θ' — выбранная длина шага вдоль направления l' . В таком случае $\Lambda'' = \Lambda' + \theta l'$.

Итак, получена новая точка Λ'' и новый базис $P_{X'}$ задачи (5) — (7), отвечающий плану X' задачи (1) — (4). При этом известен также базис оптимального плана $X_{\Lambda''}$ -задачи, с помощью которого формируются дополнительные ограничения: $x_j = 0$, если $\Delta_j(\Lambda'') > \varepsilon$, определяющие вместе с условиями (3) — (4) многогранное множество $G_{\Lambda''}(\varepsilon)$. Новые данные служат основой для проведения следующей большей итерации.

23. Одним из преимуществ методов блочного программирования, основанных на минимизации функции $f(\Lambda)$, является сравнительная простота выбора начального приближения.

Действительно, в качестве начального приближения в этих методах можно принять любое значение Λ , для которого линейная форма $(C_\Lambda, X) = (C - \Lambda A, X)$ ограничена на множестве G .

При ограничении множества G (наиболее типичный случай в практических задачах) в качестве Λ , очевидно, можно взять любую точку m -мерного пространства. Такая широкая возможность выбора начального приближения позволяет реализовать всякого рода дополнительные соображения относительно исходной точки Λ , связанные с физическим (экономическим) смыслом конкретной практической задачи.

В случае неограниченности множества G целесообразно ввести в систему условий (3) дополнительное ограничение

$$\sum_{j=1}^n x_j \leq Q, \quad (117)$$

где Q — достаточно большое число.

Тогда выбор начальной точки не требует вычислений. Ограничение (117) следует сохранять в процессе решения задачи (1) — (4) до тех пор, пока будет получена точка Λ' , для которой $f(\Lambda')$ не зависит от Q . Если же минимальное значение функции $f(\Lambda)$ оказывается зависимым от Q , то линейная форма (C_Λ, X) не ограничена на G при любом Λ , т. е. R — пустое множество. В этом случае задача (1) — (4) не имеет решения. Обоснование указанного приема может быть сделано на основе известного метода построения исходного плана двойственной задачи (см. гл. 9, п. 5.4 книги [8]). Метод решения блочной задачи, основанный на движении по вершинам многогранного множества $\bar{R}$ (раздел II), предполагает известной некоторую исходную точку поверхности (25) к одной из ее вершин легко формируется на базе так называемого метода градиента, изложенного в книге [8] (гл. 9, п. 5.3). Реализация этого процесса требует анализа ряда линейных задач с условиями (3), (4).

VI. АНАЛИЗ СХОДИМОСТИ МЕТОДОВ БЛОЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ, СВЯЗАННЫХ С МИНИМИЗАЦИЕЙ ФУНКЦИИ $f(\lambda)$

24. Как отмечалось в предыдущем разделе, заключительную стадию процесса минимизации функции $f(\Lambda)$ целесообразно проводить, руководствуясь методом E_0 для выбора величины сдвига вдоль подходящего на-

правления. Покажем, что в этом случае процесс минимизации функции $f(\Lambda)$ конечен.

Теорема 3. Если, начиная с некоторой точки $\Lambda^{(s)}$, подходящее направление выбирается путем минимизации функции $\Phi(l, \Lambda^{(k)})$ или максимизации функции $\tilde{\Phi}(X, M)$, а длина шага вдоль избранного направления определяется с помощью способа E_0 , то через конечное число больших итераций будет получен минимум функции $f(\Lambda)$ и найдено решение задачи (1) — (4) либо обнаружится, что условия (2) — (4) несовместны.

Доказательство. Рассмотрим систему условий

$$\sum_{v=1}^N z_v \bar{P}_v - \sum_{i=1}^n \mu_i \bar{D}_i = \bar{B}, \quad z_v \geq 0, \quad \mu_i \geq 0, \quad (118)$$

где $\bar{P}_v$, как обычно, порождаются крайними элементами множества G , векторы $\bar{D}_i = \begin{pmatrix} D_i \\ 0 \end{pmatrix}$ определяют множество M . Без ограничения общности будем считать

эти условия невырожденными, т. е. предполагать, что $\bar{B}$ не может быть представлен в виде линейной комбинации менее, чем $m + 1$ векторов $\bar{P}_i$ и $\bar{D}_i$. (Этого всегда можно достичь с помощью обычного ε -приема.) Как было установлено, задача $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda')$, связанная с точкой Λ' , может быть представлена в виде (91) — (93). Задача $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda')$ — двойственна относительно (91) — (93). Обозначим через $S(M, \Lambda') \leq 0$ общее экстремальное значение функций (52) и (69) задач $\Gamma(M, \Lambda')$ и $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda')$.

Пусть векторы

$$\bar{P}_{v_1}, \bar{P}_{v_2}, \dots, \bar{P}_{v_t}, -\bar{D}_{i_1}, -\bar{D}_{i_2}, \dots, -\bar{D}_{i_{m+1-t}} \quad (119)$$

составляют базис оптимального опорного плана задачи (91) — (93), причем $S(M, \Lambda^*) < 0$. Подходящее направление U^* , совпадая с вектором оценок условий задачи относительно данного оптимального базиса, удовлетворяет соотношениям

$$\left. \begin{aligned} (\bar{l}', \bar{p}_{v\alpha}) &= 0, & \alpha &= 1, 2, \dots, t; \\ (\bar{l}', \bar{p}_v) &\geq 0, & v &\in I(\Lambda'), \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

где множество индексов $I(\Lambda')$ определяется требованием: $v \in I(\Lambda')$, если $(\bar{P}_v, \bar{\Lambda}') = \sigma_v$. Очевидно, способ E_0 определения величины θ' шага вдоль направления l' сводится к вычислению максимального θ , при котором вектор $\Lambda' + l' \cdot \theta$ является еще планом задачи (8)–(10). Если $S(M, \Lambda') < 0$ и $\theta' = \infty$, то, как мы знаем, задача (1)–(4) неразрешима. Если же $\theta' < \infty$, то в множество $I(\Lambda'')$ включается индекс $v' \in I(\Lambda')$ вектора $\bar{P}_{v'}$, для которого

$$(\bar{P}_{v'}, \bar{l}') < 0 \quad \bar{\Lambda}'' = \bar{\Lambda}' + \theta \bar{l}'; \quad (\bar{P}_{v'}, \bar{\Lambda}'') = \sigma_{v'}). \quad (121)$$

Из соотношения (120) следует, что $v_\alpha \in I(\Lambda'')$ при $\alpha = 1, 2, \dots, t$. Следовательно, оптимальный базис задачи $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda')$ является базисом плана задачи $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda'')$.

Неравенство (121) означает, что введя в базис (119) вектора Γ увеличим целевую функцию задачи $\tilde{G}(M, \Lambda'')$, если только план с этим базисом является невырожденным. Последнее же вытекает из предположения, сделанного в начале доказательства. Следовательно,

$$S(M, \Lambda'') > S(M, \Lambda'). \quad (122)$$

Из неравенства (122) вытекает, что в процессе решения задачи с использованием способа E_0 подходящие направления, выбранные на различных больших итерациях, соответствуют различным базисам, составленным из векторов $\bar{P}_v$ и $\bar{D}_i$. Число таких базисов, приходим к выводу, что через не-

Учитывая конечность числа таких точек, приходим к выводу, что либо $S(M, \lambda^*) = 0$, сколько больших итераций будет получена точка λ^* , для которой либо $S(M, \lambda^*) = 0$, либо $S(M, \lambda^*) < 0$, $\theta^* = \infty$. В первом случае оптимальный план задачи $\tilde{G}(M, \lambda^*)$ является решением задачи (4) — (4). Теорема доказана.

Теорема 3 доказана для случая, когда подходящее направление выбирается путем решения задач $\Gamma(M, \Lambda)$, $\bar{\Gamma}(M, \Lambda)$. Вывод о конечности процесса останется в силе и при использовании для выбора подходящего направления задач $\Gamma(M, \Lambda, \varepsilon)$, $\bar{\Gamma}(M, \Lambda, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. В этом случае длину шага вдоль подходящего направления следует определять при помощи способа $E_0(\varepsilon)$.

плана $X_{\Delta'}$ -задачи. Выбор длины шага вдоль направления l' можно производить либо на основе способа E_0 (двигаться до первого положительного критического значения функции $f(\Lambda' + \theta l')$), либо с помощью способа $E_{\min}$ (двигаться до тех пор, пока функция $f(\Lambda' + \theta l')$ продолжает убывать). Отметим, что в данном методе длина шага всегда конечна, поскольку для любого Λ $f(\Lambda) \geq (C, X)$, где X — исходный план задачи (1) — (4). Пусть θ' — выбранная длина шага вдоль направления l' . В таком случае $\Lambda'' = \Lambda' + \theta l'$.

Итак, получена новая точка Λ'' и новый базис $P_{X'}$ задачи (5) — (7), отвечающий плану X' задачи (1) — (4). При этом известен также базис оптимального плана $X_{\Delta'}$ -задачи, с помощью которого формируются дополнительные ограничения: $x_j = 0$, если $\Delta_j(\Lambda'') > \varepsilon$, определяющие вместе с условиями (3) — (4) многогранное множество $G_{\Delta''}(\varepsilon)$. Новые данные служат основой для проведения следующей большой итерации.

23. Одним из преимуществ методов блочного программирования, основанных на минимизации функции $f(\Lambda)$, является сравнительная простота выбора начального приближения.

Действительно, в качестве начального приближения в этих методах можно принять любое значение Λ , для которого линейная форма $(C, X) = (C - \Lambda A, X)$ ограничена на множестве G .

При ограниченности множества G (наиболее типичный случай в практических задачах) в качестве Λ , очевидно, можно взять любую точку m -мерного пространства. Такая широкая возможность выбора начального приближения позволяет реализовать всякого рода дополнительные соображения относительно исходной точки Λ , связанные с физическим (экономическим) смыслом конкретной практической задачи.

В случае неограниченности множества G целесообразно ввести в систему условий (3) дополнительное ограничение

$$\sum_{j=1}^n x_j \leq Q, \quad (117)$$

где Q — достаточно большое число.

Тогда выбор начальной точки не требует вычислений. Ограничение (117) следует сохранять в процессе решения задачи (1) — (4) до тех пор, пока будет получена точка Λ' , для которой $f(\Lambda')$ не зависит от Q . Если же минимальное значение функции $f(\Lambda)$ оказывается зависимым от Q , то линейная форма (C, X) не ограничена на G при любом Λ , т. е. R — пустое множество. В этом случае задача (1) — (4) не имеет решения. Обоснование указанного приема может быть сделано на основе известного метода построения исходного плана двойственной задачи (см. гл. 9, п. 5.4 книги [8]). Метод решения блочной задачи, основанный на движении по вершинам многогранного множества $\bar{R}$ (раздел II), предполагает известной некоторую исходную вершину этого множества. Процесс перехода от произвольной точки поверхности (25) к одной из ее вершин легко формируется на базе так называемого метода градиента, изложенного в книге [8] (гл. 9, п. 5.3). Реализация этого процесса требует анализа ряда линейных задач с условиями (3), (4).

VI. АНАЛИЗ СХОДИМОСТИ МЕТОДОВ БЛОЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ, СВЯЗАННЫХ С МИНИМИЗАЦИЕЙ ФУНКЦИИ $f(\Lambda)$

24. Как отмечалось в предыдущем разделе, заключительную стадию процесса минимизации функции $f(\Lambda)$ целесообразно проводить, руководствуясь методом E_0 для выбора величины сдвига вдоль подходящего на-

правления. Покажем, что в этом случае процесс минимизации функции $f(\Lambda)$ конечен.

Теорема 3. Если, начиная с некоторой точки $\Lambda^{(s)}$, подходящее направление выбирается путем минимизации функции $\varphi(l, \Lambda^{(h)})$ или максимизации функции $\tilde{\varphi}(X, M)$, а длина шага вдоль избранного направления определяется с помощью способа E_0 , то через конечное число больших итераций будет получен минимум функции $f(\Lambda)$ и найдено решение задачи (1) — (4) либо обнаружится, что условия (2) — (4) несовместны.

Доказательство. Рассмотрим систему условий

$$\sum_{v=1}^N z_v \bar{P}_v - \sum_{i=1}^n \mu_i \bar{D}_i = \bar{B}, \quad z_v \geq 0, \quad \mu_i \geq 0, \quad (118)$$

где $\bar{P}_v$, как обычно, порождаются крайними элементами множества G , векторы $\bar{D}_i = \begin{pmatrix} D_i \\ 0 \end{pmatrix}$ определяют множество M . Без ограничения общности будем считать

эти условия невырожденными, т. е. предполагать, что $\bar{B}$ не может быть представлен в виде линейной комбинации менее, чем $m+1$ векторов $\bar{P}_v$ и $\bar{D}_i$. (Этого всегда можно достичь с помощью обычного ε -приема.) Как было установлено, задача $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda')$, связанная с точкой Λ' , может быть представлена в виде (91) — (93). Задача $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda')$ — двойственна относительно (91) — (93). Обозначим через $S(M, \Lambda') \leq 0$ общее экстремальное значение функций (52) и (69) задач $\Gamma(M, \Lambda')$ и $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda')$.

Пусть векторы

$$\bar{P}_{v_1}, \bar{P}_{v_2}, \dots, \bar{P}_{v_t}, -\bar{D}_{i_1}, -\bar{D}_{i_2}, \dots, -\bar{D}_{i_{m+1-t}} \quad (119)$$

составляют базис оптимального опорного плана задачи (91) — (93), причем $S(M, \Lambda') < 0$. Подходящее направление $\bar{l}'$, совпадая с вектором оценок условий задачи относительно данного оптимального базиса, удовлетворяет соотношениям

$$\left. \begin{aligned} (\bar{l}', \bar{P}_{v_\alpha}) &= 0, & \alpha &= 1, 2, \dots, t; \\ (\bar{l}', \bar{P}_v) &\geq 0, & v &\in I(\Lambda'), \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

где множество индексов $I(\Lambda')$ определяется требованием: $v \in I(\Lambda')$, если $(\bar{P}_v, \bar{\Lambda}') = \sigma_v$. Очевидно, способ E_0 определения величины θ' шага вдоль направления $\bar{l}'$ сводится к вычислению максимального θ , при котором вектор $\bar{\Lambda}' + \bar{l}' \cdot \theta$ является еще планом задачи (8) — (10). Если $S(M, \Lambda') < 0$ и $\theta' = \infty$, то, как мы знаем, задача (1) — (4) неразрешима. Если же $\theta' < \infty$, то в множество $I(\Lambda'')$ включается индекс $v' \notin I(\Lambda')$ вектора $\bar{P}_{v'}$, для которого

$$(\bar{P}_{v'}, \bar{l}') < 0 \quad \bar{\Lambda}'' = \bar{\Lambda}' + \theta' \bar{l}'; \quad (\bar{P}_{v'}, \bar{\Lambda}'') = \sigma_{v'}. \quad (121)$$

Из соотношения (120) следует, что $v_\alpha \in I(\Lambda'')$ при $\alpha = 1, 2, \dots, t$. Следовательно, оптимальный базис задачи $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda')$ является базисом плана задачи $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda'')$.

Неравенство (121) означает, что введение в базис (119) вектора $\bar{P}_{v'}$ увеличит целевую функцию задачи $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda'')$, если только план с этим базисом является невырожденным. Последнее же вытекает из предположения, сделанного в начале доказательства. Следовательно,

$$S(M, \Lambda'') > S(M, \Lambda'). \quad (122)$$

Из неравенства (122) вытекает, что в процессе решения задачи с использованием способа E_0 подходящие направления, выбранные на различных больших итерациях, соответствуют различным базисам, составленным из векторов $\bar{P}_v$ и $\bar{D}_i$.

Учитывая конечность числа таких базисов, приходим к выводу, что через несколько больших итераций будет получена точка Λ^* , для которой либо $S(M, \Lambda^*) = 0$, либо $S(M, \Lambda^*) < 0$, $\theta^* = \infty$. В первом случае оптимальный план задачи $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda^*)$ является решением задачи (1) — (4). Реализация второй возможности указывает на несовместность условий (2) — (4). Теорема доказана.

Теорема 3 доказана для случая, когда подходящее направление выбирается путем решения задач $\Gamma(M, \Lambda)$, $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda)$. Вывод о конечности процесса останется в силе и при использовании для выбора подходящего направления задач $\Gamma(M, \Lambda, \varepsilon)$, $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. В этом случае длину шага вдоль подходящего направления следует определять при помощи способа $E_0(\varepsilon)$.

25. Вывод о конечности методов блочного программирования, использующих способ E_0 , основывается на неравенстве (122). Если же при переходе от точки Λ' к точке Λ'' применять способ $E_{\min}$, то неравенство (122), вообще говоря, перестанет соблюдаться. Дело в том, что в этом случае решение задачи $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda')$ вовсе не обязано быть планом задачи $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda'')$. Поэтому сходимость процесса минимизации функции $f(\Lambda)$, использующего способ $E_{\min}$, необходимо исследовать на основе иных соображений.

В последующих рассуждениях существенно, что задачи, в результате решения которых выбирается подходящее направление, формируются с помощью множеств $G_\Lambda(\varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$.

Установим сходимость процесса получения приближенного решения задачи (1) — (4), который основан на способе $T(\varepsilon)$ выбора подходящего направления, связанном с решением задач $\Gamma(M, \Lambda, \varepsilon)$ и $\Gamma(M, \Lambda, \varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$.

Теорема 4. Пусть возможное направление l' выбирается на основе способа $T(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, а величина θ' вычисляется с помощью способа $E_{\min}$. Если функция $f(\Lambda)$ имеет конечный минимум, то после конечного числа больших итераций строится план X_ε задачи (1) — (4) и точка Λ , связанные условиями

$$X_\varepsilon \in G_\Lambda(\varepsilon). \quad (123)$$

Если функция $f(\Lambda)$ неограничена снизу, то либо это устанавливается на одной из итераций, либо строится последовательность точек $\Lambda^{(k)}$, для которой

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\Lambda^{(k)}) = -\infty. \quad (124)$$

Доказательство теоремы (4) опирается на одно вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, не зависящее от точки Λ' , что при $|\Lambda - \Lambda'| \leq \delta$ и $f(\Lambda') < \infty$

$$f(\Lambda) - (B, \Lambda) = \sup_{X \in G_{\Lambda'}(\varepsilon)} (C_\Lambda, X). \quad (125)$$

Доказательство. Пусть Λ' — произвольная точка множества R . Разделим крайние элементы X_v , $v = 1, 2, \dots, N$, на две группы. В первую группу отнесем те из них, которые принадлежат множеству $G_{\Lambda'}(\varepsilon)$. Множество индексов v этих элементов обозначим через $I(\Lambda')$. Остальные элементы объединим во вторую группу.

Пусть α_v — минимальное положительное значение компоненты элемента X_v ; $\alpha = \min_{1 \leq v \leq N} \alpha_v$.

Рассмотрим произвольный элемент X_v второй группы ($v \notin I(\Lambda')$).

Если X_v — вершина, то, очевидно,

$$(C_{\Lambda'}, X_v) = (C_{\Lambda'}, X_{v*}) - \sum_{j=1}^n \Delta_j(\Lambda') x_j^{(v)} \leq (C_{\Lambda'}, X_{v*}) - \alpha \varepsilon, \quad (126)$$

где X_{v*} — оптимальный план $X_{\Lambda'}$ -задачи. Если X_v — направляющий вектор неограниченного ребра, то

$$(C_{\Lambda'}, X_v) = (C_{\Lambda'}, X_{v*} + X_v) - (C_{\Lambda'}, X_{v*}) \leq -\alpha \varepsilon. \quad (127)$$

Выберем такое $\delta > 0$, что при $|l| \leq \delta$

$$\max_{1 \leq v \leq N} |lA, X_v| < \frac{1}{2} \alpha \varepsilon. \quad (128)$$

Рассмотрим произвольную точку Λ , для которой $|\Lambda - \Lambda'| = |l| \leq \delta$. Если $\sup_{X \in G_{\Lambda'}(\varepsilon)} (C_\Lambda, X) = \infty$, то, очевидно, равенство (125) соблюдается.

Пусть

$$\sup_{x \in G_{\Lambda'}(\varepsilon)} (G_{\Lambda}, X) < \infty. \quad (129)$$

Для произвольного направляющего вектора X_v неограниченного ребра множества G имеем: $(C_{\Lambda}, X_v) \leq -1/2\alpha\varepsilon$ при $v \notin I(\Lambda')$ (в силу (127) и (128)); $(C_{\Lambda}, X_v) \leq 0$ при $v \in I(\Lambda')$ (в силу (129)).

Следовательно, $\sup_{x \in G} (C_{\Lambda}, X) = (C_{\Lambda}, X_{v^*}) < \infty$, где X_{v^*} — некоторая вершина G .

Покажем, что $v' \in I(\Lambda')$. Действительно, $(C_{\Lambda}, X_{v'}) \geq (C_{\Lambda}, X_{v^*})$ или, согласно (128),

$$(C_{\Lambda}, X_{v'}) > (C_{\Lambda'}, X_{v^*}) - \frac{1}{2}\alpha\varepsilon. \quad (130)$$

С другой стороны, для любого $v \notin I(\Lambda')$ соотношения (126) и (128) приводят к неравенству

$$(C_{\Lambda}, X_v) \leq (C_{\Lambda'}, X_{v^*}) - \frac{1}{2}\alpha\varepsilon. \quad (131)$$

Сопоставление (130) и (131) убеждает нас в том, что $X_{v'}$ — вершина множества $G_{\Lambda'}(\varepsilon)$. Поэтому $\sup_{x \in G} (C_{\Lambda}, X) = \sup_{x \in G_{\Lambda'}(\varepsilon)} (C_{\Lambda}, X)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4. 1) Подобно задаче $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda')$ (см. (91) — (93)) задача $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda', \varepsilon)$ сводится к максимизации линейной формы $-\sum_{i=1}^r d_i \mu_i$ при условиях

$$\sum_{v \in I(\Lambda')} z_v \bar{P}_v - \sum_{i=1}^r \mu_i \bar{D}_i = \bar{B}; \quad z_v \geq 0, \quad \mu_i \geq 0,$$

где $I(\Lambda')$ — множество номеров v крайних элементов, участвующих в образовании множества $G_{\Lambda'}(\varepsilon)$. В силу того, что число N векторов P_v конечно, общее количество базисов у задач $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda', \varepsilon)$, относящихся ко всевозможным точкам Λ' , не превосходит C_{N+r}^{m+1} . Но, как известно, минимальное значение линейной формы достигается на одном из опорных планов задачи. Поэтому найдется такое число $\gamma > 0$, независщее от точки Λ' , что либо экстремальное значение $v_0(\varepsilon)$ задачи $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda', \varepsilon)$ равно нулю, либо

$$v_0(\varepsilon) = -\min_{i=1}^r d_i \mu_i < -\gamma. \quad (132)$$

2) Пусть l' — направление, выбранное в результате решения задач $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda', \varepsilon)$ и $\tilde{\Gamma}(M, \Lambda', \varepsilon)$, причем

$$v_0(\varepsilon) = \varphi(l', \varepsilon) = \max_{x \in G_{\Lambda'}(\varepsilon)} (-l'A, X) + (B, l') < 0. \quad (133)$$

Из (132) следует, что при соблюдении (133)

$$\max_{x \in G_{\Lambda'}(\varepsilon)} (B - AX, l') < -\gamma. \quad (134)$$

Выберем такое $\theta > 0$, что

$$\theta |l'| = \delta, \quad (135)$$

где δ — число, фигурирующее в лемме 1. Используя лемму 1 и неравенство (134), имеем

$$\begin{aligned} f(\Lambda' + \theta l') - f(\Lambda') &= \sup_{x \in G} (C - (\Lambda' + \theta l')A, X) - \sup_{x \in G} (C - \Lambda'A, X) + \\ &+ (B, l')\theta = \sup_{x \in G_{\Lambda'}(\varepsilon)} (C_{\Lambda' + \theta l'}, X) - \sup_{x \in G_{\Lambda'}(\varepsilon)} (C_{\Lambda'}, X) + \theta(B, l') \leq \\ &\leq \theta \left[\sup_{x \in G_{\Lambda'}(\varepsilon)} (-l'A, X) + (B, l') \right] = \theta v_0(\varepsilon) < -\theta\gamma. \end{aligned} \quad (136)$$

Для ограниченного множества M длина вектора l' ограничена некоторым числом q , зависящим от точки Λ' . Тот же вывод сохранится и в общем случае, если только выбирать l' среди опорных планов линейной задачи, эквивалентной $\Gamma(M, \Lambda', \varepsilon)$, что, естественно, всегда возможно. Отсюда и из равенства (135) получаем оценку для θ : $\theta \geq \delta/q$.

Следовательно, неравенство (136) приводит к соотношению

$$f(\Lambda' + \theta l') \leq f(\Lambda') - (\delta/q)\gamma.$$

Поскольку при использовании способа $E_{\min}$ величина θ' выбирается путем минимизации функции $f(\Lambda' + \theta l')$ по θ , то для $\theta' < \infty$ $f(\Lambda') \leq f(\Lambda' + \theta l') \leq f(\Lambda') - (\delta/q)\gamma$.

3) Итак, если $v_0(\varepsilon) < 0$, $\theta' < \infty$, то в результате одной большой итерации значение функции $f(\Lambda)$ уменьшается не менее, чем на фиксированное число $(\delta/q)\gamma > 0$. Следовательно, при совместности условий (2)–(4), когда $f(\Lambda)$ имеет конечный минимум, через несколько больших итераций будет получена точка Λ , для которой $v_0(\varepsilon) = 0$, и одновременно построен план X_ε задачи (1)–(4), связанный с Λ соотношением (123). Если же $\inf f(\Lambda) = -\infty$, причем на каждой большой итерации $\theta' < \infty$, то $f(\Lambda^{(k)}) \leq f(\Lambda') - k(\delta/q)\gamma$, т. е. $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\Lambda^{(k)}) = -\infty$. Теорема доказана.

26. Установим сходимость процессов минимизации функции $f(\Lambda)$, в которых подходящее направление выбирается путем решения задач $\Gamma_1(M, \Lambda, \varepsilon)$ и $\tilde{\Gamma}_1(M, \Lambda, \varepsilon)$, а длина шага определяется способом $E_{\min}$. Для этой цели предварительно докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2. Пусть K — произвольное выпуклое многогранное множество точек $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; Π_β — гиперплоскость с уравнением $x_n = \beta$; K_β — общая часть K и Π_β . Если K_{β_1} и K_{β_2} , $\beta_1 < \beta_2$ — непустые множества, $X \in K_{\beta_2}$, то

$$\rho(K_{\beta_1}, X) \leq c(\beta_2 - \beta_1), \quad (137)$$

где $\rho(K_\beta, X)$ — расстояние от точки X до множества K_β , c — число, не зависящее от β_1, β_2, X .

Доказательство. Без ограничения общности примем, что K определяется условиями $\sum_{j=1}^n x_j Q_j = Q_0$, $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, n$. Проекция $\bar{K}_{\beta_2}$ множества K_{β_2} на гиперплоскость Π_{β_1} задается соотношениями

$$\sum_{j=1}^{n-1} x_j Q_j = Q_0 - \beta_2 Q_n; \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1; \quad x_n = \beta_1. \quad (138)$$

Пусть $\bar{X}$ — произвольная точка множества $\bar{K}_{\beta_2}$, не принадлежащая множеству K_{β_1} . Введем гиперплоскость

$$\sum_{j=1}^{n-1} d_j x_j = d, \quad (139)$$

разделяющую множество K_{β_1} и шар $|X - \bar{X}| \leq \rho(K_{\beta_1}, \bar{X})$. Будем считать коэффициенты гиперплоскости (139) нормированными таким образом, что $\sum_{j=1}^{n-1} d_j \bar{x}_j - d = \rho(K_{\beta_1}, \bar{X})$. Рассмотрим задачу о максимизации линейной формы

$$\sum_{j=1}^{n-1} d_j x_j \quad (140)$$

при условиях (138).

Если через $\mu(\beta)$ обозначить максимальное значение (140) при условиях (138), в которых β_2 заменено на β , то, очевидно, $\mu(\beta_1) = d$, $\mu(\beta_2) \geq \sum_{j=1}^{n-1} d_j \bar{x}_j$ и, следова-

тельно,

$$\rho(K_{\beta_1}, \bar{X}) \leq \mu(\beta_2) - \mu(\beta_1). \quad (141)$$

Как известно, $\mu(\beta)$, $\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$ — выпуклая вверх кусочно-линейная функция. Поэтому неравенство (141) приводит к соотношению

$$\rho(K_{\beta_1}, \bar{X}) \leq (\beta_2 - \beta_1) \left. \frac{d\mu(\beta)}{d\beta} \right|_{\beta=\beta_1}. \quad (142)$$

Пусть $Q(D) = (Q_{i_1}, Q_{i_2}, \dots, Q_{i_m})$ — оптимальный базис задачи (138), (140) при β_2 , достаточно близких к β_1 . В таком случае $\left. \frac{d\mu(\beta)}{d\beta} \right|_{\beta=\beta_1} = -(d_{i_1}, d_{i_2}, \dots, d_{i_m}) \cdot Q^{-1}(D)Q_n$. Откуда, учитывая ограниченность по модулю коэффициентов d_i и ограниченность числа возможных матриц $Q(D)$, имеем $\left. \frac{d\mu(\beta)}{d\beta} \right|_{\beta=\beta_1} \leq c_1$, где c_1 зависит лишь от множества K .

Подставляя найденную оценку в (142), получаем $\rho(K_{\beta_1}, \bar{X}) \leq c_1(\beta_2 - \beta_1)$. Если теперь X — произвольная точка множества K_{β_2} , то, обозначая через $\bar{X}$ проекцию X на гиперплоскость Π_{β_1} , приходим к окончательной оценке (137) при $c = c_1 + 1$. Лемма доказана.

Теорема 5. Пусть подходящее направление $l^{(k)}$ выбирается путем решения задач $\Gamma_1(M, \Lambda^{(k)}, \varepsilon)$, $\Gamma_1(M, \Lambda^{(k)}, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, величина $\theta^{(k)}$ сдвига вдоль $l^{(k)}$ определяется с помощью способа $E_{\min}$, M — выпуклый многогранник. Процесс минимизации функции $f(\Lambda)$ приводит к одной из следующих возможностей.

1°. После конечного числа S больших итераций обнаруживается, что либо $\Lambda^{(s-1)}$ — искомый минимум и, следовательно, оптимальный план задачи $\tilde{\Gamma}_1(M, \Lambda^{(s-1)}, \varepsilon)$ — решение задачи (1) — (4), либо функция $f(\Lambda)$ неограничена снизу.

2°. Строится последовательность точек $\Lambda^{(k)}$, для которой

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\Lambda^{(k)}) = \inf f(\Lambda), \quad (143)$$

причем в случае конечности правой части (143) оптимальный план задачи $\tilde{\Gamma}_1(M, \Lambda^{(k)}, \varepsilon)$ для достаточно большого k является решением задачи (1) — (4).

Доказательство. Пусть

$$f(\Lambda^{(k)}) - q > \inf f(\Lambda), \quad q > 0, \quad (144)$$

и Λ^* — ближайшая к $\Lambda^{(k)}$ точка множества $\{\Lambda : f(\Lambda) = f(\Lambda^{(k)}) - q\}$. В соответствии с леммой 2 ($K = \bar{R}$, $\beta_1 = f(\Lambda^*)$, $\beta_2 = f(\Lambda^{(k)})$)

$$q \geq c_1 |\Lambda^* - \Lambda^{(k)}|, \quad (145)$$

где $c_1 > 0 - \text{const}$. Если $\Lambda^* - \Lambda^{(k)} \in M$, то

$$f(\Lambda^{(k)}) - \min_{\Lambda - \Lambda^{(k)} \in M} f(\Lambda) \geq q. \quad (146)$$

Пусть теперь $\Lambda^* - \Lambda^{(k)} \notin M$. В таком случае $\rho_k(\Lambda^* - \Lambda^{(k)}) \in M$,

$$\text{где} \quad 0 < \rho_k = \frac{1}{|\Lambda^* - \Lambda^{(k)}|} \min_{\Lambda - \Lambda^{(k)} \in M} |\Lambda - \Lambda^{(k)}| < 1. \quad (147)$$

В силу выпуклости вниз функции $f(\Lambda)$

$$f(\Lambda^{(k)} + \rho_k(\Lambda^* - \Lambda^{(k)})) \leq (1 - \rho_k)f(\Lambda^{(k)}) + \rho_k f(\Lambda^*) = f(\Lambda^{(k)}) - \rho_k q.$$

Учитывая далее (145) и (147), имеем $f(\Lambda^{(k)} + \rho_k(\Lambda^* - \Lambda^{(k)})) \leq f(\Lambda^{(k)}) - c_2$, где $c_2 > 0 - \text{const}$, зависящая лишь от R и M . Следовательно,

$$f(\Lambda^{(k)}) - \min_{\Lambda - \Lambda^{(k)} \in M} f(\Lambda) \geq c_2. \quad (148)$$

Из очевидных соотношений: $\varphi_1(0, \Lambda^{(k)}, \varepsilon) = f(\Lambda^{(k)})$, $\varphi_1(\Lambda - \Lambda^{(k)}, \Lambda^{(k)}, \varepsilon) \leq f(\Lambda)$ и неравенств (146) и (148) вытекает

$$\varphi_1(0, \Lambda^{(k)}, \varepsilon) - \min_{l \in M} \varphi_1(l, \Lambda^{(k)}, \varepsilon) = \varphi_1(0, \Lambda^{(k)}, \varepsilon) - \varphi_1(l^{(k)}, \Lambda^{(k)}, \varepsilon) \geq \bar{q}, \quad (149)$$

где $\bar{q} = \min\{q, c_2\}$, $l^{(k)}$ — подходящее направление, выбранное на данной итерации.

В соответствии со способом $E_{\min}$ определения величины $\theta^{(k)}$

$$f(\Lambda^{(k+1)}) = f(\Lambda^{(k)} + \theta^{(k)}l^{(k)}) = \min_{\theta \geq 0} f(\Lambda^{(k)} + \theta l^{(k)}). \quad (150)$$

(Случай $\theta^{(k)} = \infty$ мы оставляем пока в стороне). Заметим, что согласно лемме 1

$$f(\Lambda^{(k)} + l) = \varphi_1(l, \Lambda^{(k)}, \varepsilon), \text{ если } |l| \leq \delta(\varepsilon), \quad (151)$$

где $\delta(\varepsilon)$ не зависит от $\Lambda^{(k)}$.

Если $|l^{(k)}| \leq \delta(\varepsilon)$, то, согласно (149), (150) и (151), имеем

$$f(\Lambda^{(k)}) - f(\Lambda^{(k+1)}) \geq f(\Lambda^{(k)}) - f(\Lambda^{(k)} + l^{(k)}) = \varphi_1(0, \Lambda^{(k)}, \varepsilon) - \varphi_1(l^{(k)}, \Lambda^{(k)}, \varepsilon) \geq \bar{q}. \quad (152)$$

Допустим теперь, что $|l^{(k)}| > \delta(\varepsilon)$. Очевидно, модуль вектора $\alpha l^{(k)}$ не превосходит $\delta(\varepsilon)$ при

$$\alpha = \delta(\varepsilon) \cdot \frac{1}{\max_{l \in M} |l|}. \quad (153)$$

Следовательно,

$$f(\Lambda^{(k)}) - f(\Lambda^{(k+1)}) \geq f(\Lambda^{(k)}) - f(\Lambda^{(k)} + \alpha l^{(k)}) = \varphi_1(0, \Lambda^{(k)}, \varepsilon) - \varphi_1(\alpha l^{(k)}, \Lambda^{(k)}, \varepsilon). \quad (154)$$

Но в силу выпуклости вниз функции $\varphi_1(l, \Lambda^{(k)}, \varepsilon)$

$$\varphi_1(\alpha l^{(k)}, \Lambda^{(k)}, \varepsilon) \leq \varphi_1(0, \Lambda^{(k)}, \varepsilon) - \alpha [\varphi_1(0, \Lambda^{(k)}, \varepsilon) - \varphi_1(l^{(k)}, \Lambda^{(k)}, \varepsilon)]. \quad (155)$$

Неравенства (154) и (155) с учетом (153) и (149) приводят к соотношению

$$f(\Lambda^{(k)}) - f(\Lambda^{(k+1)}) \geq c_3 \delta(\varepsilon) \bar{q}, \quad (156)$$

где $c_3 > 0 - \text{const}$.

Из соотношений (152) и (156) вытекает следующая оценка для убывания функции $f(\Lambda)$ за одну итерацию

$$f(\Lambda^{(k)}) - f(\Lambda^{(k+1)}) \geq \bar{\delta} \bar{q}, \quad (157)$$

где $\bar{\delta} = c_3 \min\{\delta(\varepsilon), 1\}$, $\bar{q} = \min\{q, c_2\}$, $c_2 > 0 - \text{const}$, $c_3 > 0 - \text{const}$. Пусть в процессе минимизации $f(\Lambda)$ возможность 1° не реализуется. Если допустить, что при этом для любого k $f(\Lambda^{(k)}) > \inf f(\Lambda) + q$, где q — произвольное положительное число, то в силу (157) $f(\Lambda^{(k)}) \leq f(\Lambda^{(0)}) - k \bar{\delta} \bar{q}$, т. е. $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\Lambda^{(k)}) = \inf f(\Lambda) = -\infty$. Справедли-

вость соотношения (143) доказана.

Дальнейшие рассуждения проводятся в предположении возможности 2° и конечности правой части (143). Пусть M_δ — множество внутренних точек общей части M и шара $|l| \leq \delta(\varepsilon)$, R_k — множество точек l , таких, что $f(\Lambda^{(k)} + l) = \min f(\Lambda)$.

Согласно соотношению (143) и лемме 2, существует такое S_0 , что при $k \geq S_0$ множества M_δ и R_k имеют непустое пересечение. Пусть $k \geq S_0$, $l' \in M_\delta \cap R_k$. В силу (151) и выпуклости вниз функции $\varphi_1(l, \Lambda^{(k)}, \varepsilon)$ точка l' является решением задачи $\Gamma_1(M, \Lambda^{(k)}, \varepsilon)$, т. е.

$$\min_{l \in M} \varphi_1(l, \Lambda^{(k)}, \varepsilon) = \varphi_1(l', \Lambda^{(k)}, \varepsilon) = \min f(\Lambda). \quad (158)$$

Покажем, что любое решение $(X^{(k)}, \mu_1^{(k)}, \mu_2^{(k)}, \dots, \mu_r^{(k)})$ задачи $\tilde{\Gamma}_1(M, \Lambda^{(k)}, \varepsilon)$ является оптимальным планом задачи (1) — (4). Поскольку l' — внутренняя точка многогранника M , условия задачи $\Gamma_1(M, \Lambda^{(k)}, \varepsilon)$, отвечающие переменным μ_i задачи $\Gamma_1(M, \Lambda^{(k)}, \varepsilon)$, — свободные. Следовательно, условия $\mu_i \geq 0$ задачи $\tilde{\Gamma}_1(M, \Lambda^{(k)}, \varepsilon)$ — за-

крепленные, в силу чего $\mu_1^{(k)} = \mu_2^{(k)} = \dots = \mu_r^{(k)} = 0$. Поэтому $X^{(k)}$ — план задачи (1) — (4). Далее, $X^{(k)}$ и l' , являясь решением задач $\tilde{\Gamma}_1(M, \Lambda^{(k)}, \varepsilon)$ и $\Gamma_1(M, \Lambda^{(k)}, \varepsilon)$, соответственно, удовлетворяют соотношению двойственности: $(C_{\Lambda}^{(k)}, X^{(k)}) = \varphi_1(l', \Lambda^{(k)}, \varepsilon) - (B, \Lambda^{(k)})$. Используя это соотношение и равенство (158), имеем

$$(C_{\Lambda}^{(k)}, X^{(k)}) + (B, \Lambda^{(k)}) = (C, X^{(k)}) + (B - AX^{(k)}, \Lambda^{(k)}) = (C, X^{(k)}) = \varphi_1(l', \Lambda^{(k)}, \varepsilon) = \min f(\Lambda).$$

Следовательно, $X^{(k)}$ — искомое решение задачи (1) — (4). Теорема 5 доказана полностью.

Теорема 5 может быть дополнена следующими двумя утверждениями.

Теорема 6. Пусть $\bar{l}_{\min}^{(k)}$ — решение задачи $\Gamma_1(M, \Lambda^{(k)}, \varepsilon)$, имеющее минимальную длину. Если $|\bar{l}^{(k)}| \rightarrow 0$ при $|\bar{l}_{\min}^{(k)}| \rightarrow 0$, то в случае ограниченности правой части (143) возможность 2° теоремы 5 не реализуется.

Доказательство. Допустим, что процесс минимизации приводит к возможности 2°. В силу (158) при $k \geq S_0$

$$\varphi_1(l^{(k)}, \Lambda^{(k)}, \varepsilon) = \min f(\Lambda). \quad (159)$$

Кроме того, $\varphi_1(0, \Lambda^{(k)}, \varepsilon) = f(\Lambda^{(k)})$.

Используя теперь лемму 2 и соотношение (143), приходим к выводу, что $\lim_{k \rightarrow \infty} |\bar{l}_{\min}^{(k)}| = 0$. Следовательно, $|\bar{l}^{(k)}| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и существует такое k_0 , что

$$|\bar{l}^{(k_0)}| \leq \delta(\varepsilon). \text{ Учитывая (151) и (159), имеем } \min_{\theta \geq 0} f(\Lambda^{(k_0)} + \theta \bar{l}^{(k_0)}) = f(\Lambda^{(k_0)} + \bar{l}^{(k_0)}) =$$

$= \min f(\Lambda)$, т. е. $\Lambda^{(k_0+1)}$ — искомый минимум. Возможность 2° не может реализоваться, так как процесс решения задачи завершается на $(k_0 + 1)$ -й итерации.

Теорема 7. Пусть подходящее направление $\bar{l}^{(k)}$ выбирается в результате анализа задач $\Gamma_1(M, \Lambda^{(k)}, \varepsilon_k)$, $\tilde{\Gamma}_1(M, \Lambda^{(k)}, \varepsilon_k)$, ($\varepsilon_k \geq 0$), M — выпуклый многогранник. Если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k = \infty \quad (160)$$

и возможность 1° теоремы 5 не реализуется, то имеет место соотношение (143).

Доказательство. Из соотношения (128), определяющего величину $\delta = \delta(\varepsilon)$, вытекает, что $\delta(\varepsilon) = \delta_0 \varepsilon$, где $\delta_0 > 0$ — const.

Если, как и при доказательстве теоремы 5, допустить, что при любом k $f(\Lambda^{(k)}) \geq \inf f(\Lambda) + q$, $q > 0$, то согласно (157)

$$f(\Lambda^{(k)}) \leq f(\Lambda^{(0)}) - c_3 \bar{q} \delta_0 \sum_{i=1}^k \varepsilon_i, \quad (161)$$

где $\varepsilon_i = \min \{\varepsilon_i, 1\}$. В силу (160) оценка (161) приводит к равенству $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\Lambda^{(k)}) =$

$= \inf f(\Lambda) = -\infty$. Тем самым теорема 7 доказана.

В заключение убедимся в конечности метода блочного программирования, изложенного в п. 21, 22. Если длина θ' шага определяется с помощью способа $E_{\min}$ и пара точек X'', Λ'' удовлетворяет условию (116), то $P_{X'} \neq P_{X''}$, поскольку в противном случае $\hat{\Lambda}'' = \hat{\Lambda}'$ и функция $f(\Lambda' + \theta(\hat{\Lambda}'' - \Lambda'))$ не могла бы достигать минимума при $\theta = \theta'$. Аналогичные рассуждения показывают, что при использовании способа E_0 базис $P_{X'}$ может сохраниться лишь в конечном числе больших итераций. В невырожденном случае каждое изменение базиса Z -задачи сопровождается увеличением ее линейной формы. Поэтому все встречающиеся циклы, тот же вывод сохраняется и для общего случая. Следовательно, процесс решения блочной задачи (1) — (4) рассматриваемым методом не может длиться бесконечно долго.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. B. Dantzig and P. Wolfe. Decomposition Principle for Linear Programs. Opns. Res., 1960, v. 8, № 1.
2. Е. Г. Гольштейн. Двойственные задачи выпуклого программирования. Экономика и матем. методы, 1965, т. I, вып. 3.
3. С. Гасс. Линейное программирование. М., Физматгиз, 1961.
4. J. M. Abadie and A. C. Williams. Dual and Parametric Methods in Decomposition. Recent Advances in Mathematical Programming, N. Y., 1963.
5. A. Brown. Iterative Solution of Game by Fictions Play. Act. Anal. of Product. and Alloc., Cowles Commis. Monograph, № 13, Wiley, N. Y., 1951.
6. Дж. Робинсон. Итеративный метод решения игр. В сб. Матричные игры. М., Физматгиз, 1961.
7. В. В. Амвросенко. Ускорение сходимости метода Брауна решения матричных игр. Экономика и матем. методы, 1965, т. I, вып. 4.
8. Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. Задачи и методы линейного программирования. М., «Сов. Радио», 1964.

Поступила в редакцию
6 VII 1965

НАУЧНЫЕ КОНСУЛЬТАЦИИ

ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Ю. Ю. ФИНКЕЛЬШТЕЙН

(Москва)

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

О том, что многие задачи экономики, управления и планирования достаточно точно формализуются с помощью модели линейного программирования (ЛП), в наших консультациях уже рассказывалось [1, 2]. Мы рассмотрим такие задачи ЛП, в которых необходимо ввести дополнительные ограничения на переменные: все или часть переменных должны быть целыми.

Возьмем следующий пример. Имеется девять самолетов первого типа и десять самолетов второго типа. Эти самолеты необходимо таким образом распределить между двумя авиалиниями, чтобы эксплуатационные расходы в единицу времени были минимальны. При этом как по первой, так и по второй линии следует перевозить в единицу времени не менее чем 53 единицы груза.

Известно количество грузов a_{ij} , которое может перевезти в единицу времени один самолет i -го типа при использовании его на j -й линии: $a_{11} = 5$, $a_{12} = 7$, $a_{21} = 6$, $a_{22} = 5$. Известна также величина c_{ij} эксплуатационных расходов в единицу времени при использовании одного самолета i -го типа на j -й линии: $c_{11} = 5$, $c_{12} = 14$, $c_{21} = 18$, $c_{22} = 10$.

Обозначим через x_{ij} — искомое количество самолетов i -го типа, выделяемое для j -й линии. Тогда задачу о распределении самолетов между авиалиниями можно поставить как задачу ЛП.

Найти числа x_{11} , x_{12} , x_{21} , x_{22} , удовлетворяющие следующим условиям:

$$5x_{11} + 14x_{12} + 18x_{21} + 10x_{22} \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$5x_{11} + 6x_{21} \geq 53, \quad (2)$$

$$7x_{12} + 5x_{22} \geq 53, \quad (3)$$

$$x_{11} + x_{12} \leq 9, \quad (4)$$

$$x_{21} + x_{22} \leq 10, \quad (5)$$

$$x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, x_{21} \geq 0, x_{22} \geq 0. \quad (6)$$

Решая задачу (1)–(6) одним из известных методов ЛП (см. [2]), мы получаем следующий оптимальный план:

$$\bar{x}_{11} = 5 \frac{10}{17}, \quad \bar{x}_{12} = 3 \frac{7}{17}, \quad \bar{x}_{21} = 4 \frac{3}{17}, \quad \bar{x}_{22} = 5 \frac{14}{17}. \quad (7)$$

Значение целевой функции (величина эксплуатационных расходов) равно:

$$c_{11}\bar{x}_{11} + c_{12}\bar{x}_{12} + c_{21}\bar{x}_{21} + c_{22}\bar{x}_{22} = 209 \frac{2}{17}. \quad (8)$$