ЭКОНОМИКА 1966
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ том II, вып. 1

НАУЧНЫЕ КОНСУЛЬТАЦИИ

ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Ю. Ю. ФИНКЕЛЬШТЕЙН
(*Москва*)

I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

О том, что многие задачи экономики, управления и планирования достаточно точно формализуются с помощью модели линейного программирования (ЛП), в наших консультациях уже рассказывалось [1, 2]. Мы рассмотрим такие задачи ЛП, в которых необходимо ввести дополнительные ограничения на переменные: все или часть переменных должны быть целыми.

Возьмем следующий пример. Имеется девять самолетов первого типа и десять самолетов второго типа. Эти самолеты необходимо таким образом распределить между двумя авиалиниями, чтобы эксплуатационные расходы в единицу времени были минимальны. При этом как по первой, так и по второй линии следует перевозить в единицу времени не менее чем 53 единицы груза.

Известно количество грузов a_{ij}, которое может перевезти в единицу времени один самолет i-го типа при использовании его на j-й линии: $a_{11} = 5$, $a_{12} = 7$, $a_{21} = 6$, $a_{22} = 5$. Известна также величина c_{ij} эксплуатационных расходов в единицу времени при использовании одного самолета i-го типа на j-й линии: $c_{11} = 5$, $c_{12} = 14$, $c_{21} = 18$, $c_{22} = 10$.

Обозначим через x_{ij} — искомое количество самолетов i-го типа, выделяемое для j-й линии. Тогда задачу о распределении самолетов между авиалиниями можно поставить как задачу ЛП.

Найти числа x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, удовлетворяющие следующим условиям:

$$5x_{11} + 14x_{12} + 18x_{21} + 10x_{22} \to \min, \tag{1}$$

$$5x_{11} + 6x_{21} \geqslant 53, \tag{2}$$

$$7x_{12} + 5x_{22} \geqslant 53, \tag{3}$$

$$x_{11} + x_{12} \leqslant 9, \tag{4}$$

$$x_{21} + x_{22} \leqslant 10, \tag{5}$$

$$x_{11} \geqslant 0,\ x_{12} \geqslant 0,\ x_{21} \geqslant 0,\ x_{22} \geqslant 0. \tag{6}$$

Решая задачу (1) — (6) одним из известных методов ЛП (см. [2]), мы получаем следующий оптимальный план:

$$\bar{x}_{11} = 5\frac{10}{17}, \quad \bar{x}_{12} = 3\frac{7}{17}, \quad \bar{x}_{21} = 4\frac{3}{17}, \quad \bar{x}_{22} = 5\frac{14}{17}. \tag{7}$$

Значение целевой функции (величина эксплуатационных расходов) равно:

$$c_{11}\bar{x}_{11} + c_{12}\bar{x}_{12} + c_{21}\bar{x}_{21} + c_{22}\bar{x}_{22} = 209\frac{2}{17}. \tag{8}$$

Очевидно, что план (7) не может быть практически реализован — количество самолетов должно быть обязательно *целым* числом (мы считаем невозможным, чтобы один и тот же самолет часть времени работал на первой линии, а часть времени — на второй линии).

Если же, кроме выполнения условий (2)—(6), потребовать еще, чтобы переменные x_{ij} были целыми, то мы получим следующий *оптимальный целочисленный план*:

$$\bar{x}^{\text{ц}}_{11} = 5,\ \bar{x}^{\text{ц}}_{12} = 4,\ \bar{x}^{\text{ц}}_{21} = 5,\ \bar{x}^{\text{ц}}_{22} = 5. \qquad (9)$$

Значение целевой функции равно:

$$c_{11}\bar{x}^{\text{ц}}_{11} + c_{12}\bar{x}^{\text{ц}}_{12} + c_{21}\bar{x}^{\text{ц}}_{21} + c_{22}\bar{x}^{\text{ц}}_{22} = 221. \qquad (10)$$

Итак, линейная модель (1)—(6) недостаточно полно описывает интересующую нас задачу о распределении самолетов, так как в модели (1)—(6) не учтено требование целочисленности переменных. Аналогичная ситуация возникает при анализе ряда других линейных моделей. Таким образом, нам приходится рассматривать задачу целочисленного линейного программирования (ЦЛП) *.

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max, \qquad (11)$$

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{aligned} \qquad (12)$$

$$\begin{aligned} &a_{m+1,\,1}\,x_1 + a_{m+1,\,2}\,x_2 + \ldots + a_{m+1,\,n}\,x_n \geqslant b_{m+1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m+p,\,1}\,x_1 + a_{m+p,\,2}\,x_2 + \ldots + a_{m+p,\,n}\,x_n \geqslant b_{m+p}, \end{aligned} \qquad (13)$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0, \qquad (14)$$

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \text{ — целые.} \qquad (15)$$

В задаче (11)—(15) условие (15) — это требование целочисленности *всех* переменных (*полностью* целочисленная задача линейного программирования). Иногда требование целочисленности накладывается лишь на *некоторые* переменные — тогда получается *частично* целочисленная задача линейного программирования.

II. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ, СВОДЯЩИЕСЯ К ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ

Рассмотрим некоторые типы задач, сводящихся к задаче ЦЛП. Целочисленную линейную модель мы выпишем, взяв в качестве примера так называемую «задачу о ранце».

Задача с неделимыми объектами. В задачах этого типа переменные $x_1, \ldots, x_n$ обозначают количества физически неделимых объектов: станков, судов, самолетов и т. д. Примером задачи с неделимыми объектами является задача о распределении самолетов, рассмотренная выше.

Задачи данного типа — это наиболее «естественные» (т. е. легче всего формулируемые) задачи ЦЛП. Оказывается, однако, что к задаче ЦЛП можно свести и целый ряд других задач, на первый взгляд не имеющих ничего общего с ЛП. Примеры таких задач приводятся ниже.

Задача о ранце. Имеется n грузов весом $g_1, g_2, \ldots, g_n$. Оценка грузов равна $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Требуется загрузить ранец (самолет, корабль и т. п.)

* Если ввести свободные переменные, то можно было бы свести неравенства к уравнениям (см. [2]).

грузоподъемностью G набором грузов с максимальной суммой оценок. Введем переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которым придадим следующий смысл:

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-й груз будет перевозиться,} \\ 0, & \text{если } j\text{-й груз не будет перевозиться.} \end{cases} \tag{16}$$

Тогда задача о ранце записывается так:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max, \tag{17}$$

$$g_1x_1 + g_2x_2 + \ldots + g_nx_n \leqslant G, \tag{18}$$

$$x_1 \leqslant 1,\ x_2 \leqslant 1,\ \ldots,\ x_n \leqslant 1, \tag{19}$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ x_n \geqslant 0, \tag{20}$$

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \text{ — целые.} \tag{21}$$

Задача выбора наилучшего варианта специализации предприятий. Имеется m предприятий, каждое из которых может выпускать n видов продукции. Для каждого из предприятий имеется S вариантов специализации, причем на i-м предприятии при специализации его по s-му варианту выпускается (в единицу времени) a_{ijs} единиц j-го вида продукции. Потребность в продукции j-го вида (в единицу времени) равна b_j. Капиталовложения в s-й вариант специализации на i-м предприятии равны k_{is}. Эксплуатационные расходы (в единицу времени) при реализации s-го варианта специализации на i-м предприятии равны q_{is}.

Требуется выбрать такой вариант специализации для каждого из m предприятий, чтобы: *а*) потребность в каждом из продуктов была полностью удовлетворена; *б*) капиталовложения не превышали заданной величины K; *в*) эксплуатационные расходы были минимальными.

Задача с фиксированными доплатами. В таких задачах на переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ накладываются линейные условия (12)—(14), но целевая функция имеет следующий вид:

$$c_1(x_1) + c_2(x_2) + \ldots + c_n(x_n), \tag{22}$$

где

$$c_j(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_j = 0, \\ c_jx_j + d_j, & \text{если } x_j > 0. \end{cases} \tag{22'}$$

Пусть, например, переменная x_j означает интенсивность использования вновь приобретаемого станка j-го типа (причем заранее известно, что можно приобрести не более одного станка каждого типа). Тогда c_j — эксплуатационные расходы на единицу машинного времени, а d_j — расходы на приобретение единицы оборудования j-го типа.

Задача о коммивояжере. Имеется n городов. Для каждой пары городов i и j известно расстояние c_{ij}. Требуется найти такой маршрут, который начинается и кончается в одном и том же фиксированном городе, проходя по одному разу через все остальные города. Длина маршрута должна быть минимальной.

Следует отметить, что к задаче о коммивояжере могут быть сведены и некоторые другие практически интересные задачи.

Задача составления оптимального расписания. Имеются m машин и n деталей. Каждая деталь должна пройти обработку на всех (или некоторых) машинах. Для каждой детали имеются технологические ограничения на порядок обработки (например, деталь № 5 после обработки на машине № 2 должна проходить обработку на машине № 3; или, например, обработки детали № 3 на машине № 4 всегда должна происходить до обработки этой детали на машине № 1). Известно время обработки каждой из деталей на каждой из машин и время переналадки каждой из машин с обработки одной детали на обработку другой детали. Требуется найти такое расписание (такой порядок запуска деталей в обработку для каждой из машин), при котором общее время выполнения всех работ будет минимальным. Возможны и другие постановки задачи составления оптимального расписания.

Задачи, у которых все опорные планы полностью целочисленные. Прежде чем переходить к описанию методов решения задач ЦЛП, отметим, что для некоторых задач ЛП целочисленность оптимального плана получается «автоматически» при решении задачи обычными методами ЛП (за счет того, что все опорные планы задачи полностью целочисленные). Типичный пример — транспортная задача ЛП, в которой мощности поставщиков и потребности потребителей — целые числа.

Существуют и другие задачи такого типа. Однако число подобных задач весьма ограничено.

III. О МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В консультации [1] отмечалось, что задачу ЛП с n переменными и m уравнениями можно было бы решить перебором c_n^m систем линейных уравнений. Однако число c_n^m обычно слишком велико и перебор вершин многогранника планов приходится рационализировать. Например, метод последовательного улучшения плана — это метод упорядоченного перебора вершин многогранника планов.

Аналогичная ситуация возникает при исследовании задач ЦЛП. Если мы попытаемся решать задачу ЦЛП прямым перебором, то даже в простейшем случае (когда переменные $x_1, \ldots, x_n$ могут принимать лишь значения 0 и 1) нам придется испытать 2^n комбинаций значений переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Но уже при $n = 60$ $2^n > 10^{18}$. Даже если предположить, что мы располагаем машиной, которая может перебрать один миллион комбинаций в секунду, то для того чтобы перебрать 2^{60} комбинаций, такой машине понадобилось бы более 30 000 лет!

Таким образом, решение задач ЦЛП реальных размеров методом прямого перебора практически невозможно.

Поэтому возникает необходимость в разработке алгоритмов для решения подобных задач. Далее мы подробно рассмотрим алгоритм Гомори для решения полностью целочисленных задач ЛП.

Алгоритм Гомори. Применяя алгоритм Гомори, приходится последовательно решать конечное число задач ЛП, полученных по определенным правилам из условий исходной задачи ЦЛП. Для решения этих задач оказывается удобным применять метод последовательного уточнения оценок, который в консультации [2] был лишь упомянут.

Поэтому подробному изложению алгоритма Гомори мы предпошлем краткое описание метода *последовательного уточнения оценок.*

Рассмотрим задачу ЛП:

$$x_0 \equiv c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max{}^*, \tag{23}$$

* Обозначение целевой функции $(c_1x_1 + \ldots + c_nx_n)$ через x_0, вместо более обычного, например $f(x_1, \ldots, x_n)$, оказывается в дальнейшем очень удобным.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \tag{24}$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0. \tag{25}$$

Так же как и в методе последовательного улучшения плана [2], на каждом шаге метода последовательного уточнения оценок переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ разбиваются на две группы: 1) m базисных переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$; 2) $(n-m)$ небазисных переменных $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n-m}}$ Тогда базисные переменные $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ и целевую функцию x_0 можно выразить через небазисные переменные $x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-m}}$:

$$\begin{aligned} x_0 &= a'_{00} + a'_{0j_1}(-x_{j_1}) + \ldots + a'_{0j_{n-m}}(-x_{j_{n-m}}), \\ x_{i_1} &= a'_{i_10} + a'_{i_1j_1}(-x_{j_1}) + \ldots + a'_{i_1j_{n-m}}(-x_{j_{n-m}}); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{i_m} &= a'_{i_m0} + a'_{i_mj_1}(-x_{j_1}) + \ldots + a'_{i_mj_{n-m}}(-x_{j_{n-m}}). \end{aligned} \tag{26}$$

В дальнейшем системы уравнений типа (26) мы будем записывать в виде симплексных таблиц:

	1	$-x_{j_1}$	$\ldots\ldots\ldots$	$-x_{j_{n-m}}$
x_0	a'_{00}	a'_{0j_1}	$\ldots\ldots\ldots$	$a'_{0j_{n-m}}$
x_{i_1}	a'_{i_10}	$a'_{i_1j_1}$	$\ldots\ldots\ldots$	$a'_{i_1j_{n-m}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{i_m}	a'_{i_m0}	$a'_{i_mj_1}$		$a'_{i_mj_{n-m}}$

(26′)

Если $a'_{0j_1} \geqslant 0, \ldots, a'_{0j_{n-m}} \geqslant 0$, то симплексная таблица (26′) называется *двойственно-допустимой*.

Если $a'_{i_10} \geqslant 0, \ldots, a'_{i_m0} \geqslant 0$, то симплексная таблица (26′) называется *допустимой*. В последнем случае таблице (26′) соответствует следующий опорный план:

$$x_{i_1} = a'_{i_10}, \ldots, x_{i_m} = a'_{i_m0}, x_{j_1} = 0, \ldots, x_{j_{n-m}} = 0. \tag{27}$$

Если симплексная таблица (26′) является одновременно допустимой и двойственно-допустимой, то соответствующий опорный план — это оптимальный план задачи (23) — (25).

* Индексы $i_1, i_2, \ldots, i_m, j_1, j_2, \ldots, j_{n-m}$, нумерующие переменные,— это те же самые числа $1, 2, \ldots, m, m+1, \ldots, n$, но взятые в другом порядке. Например, если $m=2$, $n=5$ и переменные x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 разбиваются на базисные переменные x_2, x_4 и небазисные x_3, x_1, x_5, то $(i_1, \ldots, i_m) = (i_1, i_2) = (2, 4)$ и $(j_1, \ldots, j_{n-m}) = (j_1, j_2, j_3) = (3, 1, 5)$.

Переходим к непосредственному изложению метода последовательного уточнения оценок. Заметим, что, применяя этот метод, получаем ряд двойственно-допустимых таблиц, последняя из которых является также и допустимой *.

1. Составляем двойственно-допустимую таблицу (26′). Если она является также и допустимой, то вычисляем оптимальный план по формуле (27). Если таблица (26′) не является допустимой, то переходом к п. 2.

2. Из коэффициентов $a'_{i_1 0}, \ldots, a'_{i_m 0}$ выбираем наибольший по абсолютной величине отрицательный коэффициент $a'_{i_k 0}$. Строку i_k объявляем направляющей.

3. В строке i_k находим тот из отрицательных элементов этой строки $a'_{i_k j_l}$, $j_l \geqslant 1$, для которого отношение $(-a'_{0 j_l}/a'_{i_k j_l})$ минимально (если в направляющей строке все элементы $a'_{i_k j}$ $(j \geqslant 1)$ неотрицательны, то исходная задача неразрешима). Столбец j_l объявляем направляющим.

4. Преобразуем таблицу (26′) по следующим правилам (выводим переменную x_{i_k} из базиса и вводим в базис переменную x_{j_l}):

а) ведущий элемент $a'_{i_k j_l}$ заменяем на $1/a'_{i_k j_l}$;

б) элементы направляющего столбца $a'_{i_p j_l}$, лежащие вне направляющей строки $(p \neq k)$, заменяем на $-(a'_{i_p j_l}/a'_{i_k j_l})$;

в) элементы направляющей строки $a'_{i_k j_q}$, лежащие вне направляющего столбца $(q \neq l)$, заменяем на $a'_{i_k j_q}/a'_{i_k j_l}$;

г) элементы $a'_{i_p j_q}$, лежащие вне направляющей строки и направляющего столбца $(p \neq k,\ q \neq l)$, заменяем на

$$a'_{i_p j_q} - (a'_{i_k j_q} a'_{i_p j_l}/a'_{i_k j_l}).$$

5. Повторяем пп. 2—4 до тех пор, пока таблица (26′) не станет допустимой. Вычисляем оптимальный план по формуле (27).

Алгоритм Гомори основан на следующей теореме, позволяющей «отсекать» оптимальный нецелочисленный опорный план задачи ЛП, не «отсекая» ни одного целочисленного плана **.

Теорема. *Допустим, что задача ЛП* (23)—(25) *имеет оптимальный нецелочисленный опорный план* $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$, *которому соответствует допустимая и двойственно-допустимая симплексная таблица* (26′), *так что*

$$(\bar{x}_{i_1}, \ldots, \bar{x}_{i_m}\ \bar{x}_{j_1}, \ldots, \bar{x}_{j_{n-m}}) = (a'_{i_1 0}, \ldots, a'_{i_m 0}, 0, \ldots, 0) \text{ и } \bar{x}_0 = a'_{00}.$$

Пусть $a'_{i_k 0}$ *—нецелое. Тогда неравенство*

$$\{a'_{i_k j_1}\} x_{j_1} + \ldots + \{a'_{i_k j_{n-m}}\} x_{j_{n-m}} \geqslant \{a'_{i_k 0}\} \qquad (28)$$

1) *не выполняется для плана* $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$, 2) *выполняется для всех целочисленных планов задачи* (23)—(25).

Здесь через $\{a'_{i_k j_1}\} \ldots \{a'_{i_k j_{n-m}}\}$, $\{a'_{i_k 0}\}$ обозначены дробные доли соответствующих чисел ***.

* Формально метод последовательного улучшения плана [2] отличается от метода последовательного уточнения оценок лишь правилом выбора направляющего элемента.

** Более подробные пояснения, а также геометрическую интерпретацию см. ниже.

*** Каждое число z можно единственным способом разложить на два слагаемых ($z = [z] + \{z\}$), если потребовать, чтобы $[z]$ было целым, а $\{z\}$ удовлетворяло условию $0 \leqslant \{z\} < 1$. $[z]$ называется целой частью числа z, а $\{z\}$ дробной долей числа z. Например: $[1{,}5] = 1$, $\{1{,}5\} = 0{,}5$; или $[-1{,}4] = -2$, $\{-1{,}4\} = 0{,}6$.

Замечание. Если все коэффициенты c_j целевой функции x_0 — целые ($j = 1, 2, \ldots, n$), то и x_0 должно быть целым числом. В этом случае, если a_{00}' — нецелое, то теорема верна и при замене неравенства (28) на следующее аналогичное неравенство

$$\{a'_{0j_1}\} x_{j_1} + \ldots + \{a'_{0j_{n-m}}\} x_{j_{n-m}} \geqslant \{a'_{00}\}. \qquad (28')$$

В дальнейшем «отсекающее» неравенство (28) или (28′) нам будет удобнее записывать, вводя новую неотрицательную целочисленную переменную η:

$$\eta = -\{a'_{i_k 0}\} + \{a'_{i_k j_1}\} x_{j_1} + \ldots + \{a'_{i_k j_{n-m}}\} x_{j_{n-m}}, \qquad (29)$$

$$\eta \geqslant 0, \qquad (30)$$

$$\eta \text{ — целое} \qquad (31)$$

(при $k = 0$ полагаем всегда $i_k = i_0 = 0$).

Теперь изложим алгоритм Гомори для решения полностью целочисленной задачи ЛП, т. е. задачи (23) — (25) с дополнительным условием целочисленности всех переменных:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ — целые.} \qquad (32)$$

1. Методом последовательного улучшения плана решаем задачу ЛП (23) — (25) и получаем допустимую и двойственно-допустимую симплексную таблицу (26′).

Если все числа $a'_{i_1 0}, \ldots, a'_{i_m 0}$ — целые, то опорный план, соответствующий таблице (26′) (см. (27)) — это оптимальный план исходной задачи (23) — (25), (32).

Если же среди чисел $a'_{i_1 0}, \ldots, a'_{i_m 0}$ есть нецелые, то переходим к п. 2.

2. Пусть i_k — минимальный номер строки (среди номеров $(1, 2, \ldots, n)$ *), для которого $a'_{i_k 0}$ — нецелое.

Приписываем снизу к таблице (26′) следующую строку: $\eta = -\{a'_{i_k 0}\} - \{a'_{i_k j_1}\}(-x_{j_1}) - \ldots - \{a'_{i_k j_{n-m}}\}(-x_{j_{n-m}})$ (очевидно, что после этого таблица (26′) перестает быть допустимой).

3. Последовательно преобразуем таблицу (26′) по правилам метода последовательного уточнения оценок до тех пор, пока таблица (26′) не станет опять допустимой. Если опорный план, соответствующей пересчитанной таблице (26′), целочисленный, то этот опорный план является оптимальным планом исходной задачи. Если же этот опорный план не является целочисленным, то переходим к п. 2.

Замечание. Выбор числа i_k в п. 2 алгоритма можно производить различными способами. С этим выбором связана конечность алгоритма, а также объем вычислений.

Проиллюстрируем применение алгоритма Гомори на численном примере. Одновременно дадим геометрическую интерпретацию, поясняющую идею «метода отсечения», лежащую в основе алгоритма Гомори.

* Если все коэффициенты $c_j (j = 1, \ldots, n)$ целевой функции x_0 — целые, то номер i_k следует выбирать из номеров $(0, 1, \ldots, n)$. Нужно лишь всегда считать $i_0 = 0$.

Пример.

$$x_1 + x_2 \to \max, \tag{33}$$

$$5x_1 + x_2 \leqslant 9, \tag{34}$$

$$x_1 + 5x_2 \leqslant 9, \tag{35}$$

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \tag{36}$$

$$x_1, x_2 \text{ — целые.} \tag{37}$$

Вводим свободные переменные x_3 и x_4 и переписываем задачу в канонической форме (см. [2]):

$$x_1 + \ \ x_2 \to \max, \tag{33'}$$

$$5x_1 + \ \ x_2 + x_3 = 9, \tag{34'}$$

$$x_1 + 5x_2 + x_4 = 9, \tag{35'}$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0, \tag{36'}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \text{ — целые.} \tag{37'}$$

Решаем задачу (33′)—(36′) методом последовательного улучшения плана (см. [2]) и получаем допустимую и двойственно-допустимую симплексную табл. 1 (без нижней строки). Условия и оптимальный план (x_1^0, x_2^0) задачи (33′)—(36′) изображены на рис. 1.

Таблица 1

	1	$-x_3$	$-x_4$
x_0	3	1/6	1/6
x_1	3/2	5/24	−1/24
x_2	3/2	−1/24	5/24
η_1	−1/2	−5/24	−23/24 *

Таблица 2

	1	$-\eta_3$	$-\eta_2$
x_0	2	0	1
x_1	1	1	−1
x_2	1	−1	2
x_4	3	4	−9
x_3	3	−4	3

План $(x_1^0, x_2^0) = (3/2, 3/2)$ не удовлетворяет условию целочисленности. Из чисел $(x_0^0, x_1^0, x_2^0) = (3, 3/2, 3/2)$ первым по номеру нецелым является x_1^0. По строке x_1 формируем дополнительное ограничение, вводя неотрицательную (целочисленную) переменную η_1:

$$\eta_1 = -\left\{\frac{3}{2}\right\} + \left\{\frac{5}{24}\right\} x_3 + \left\{-\frac{1}{24}\right\} x_4 = -\frac{1}{2} - \frac{5}{24}(-x_3) - \frac{23}{24}(-x_4) \tag{38}$$

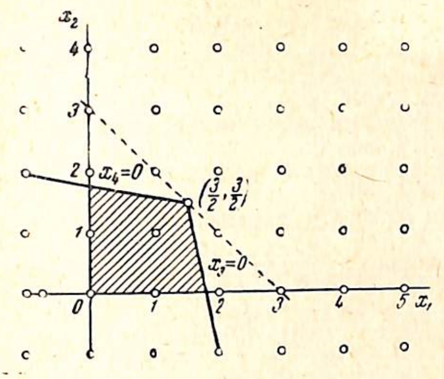

Рис. 1

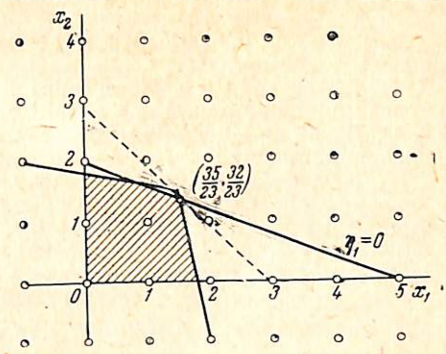

Рис. 2

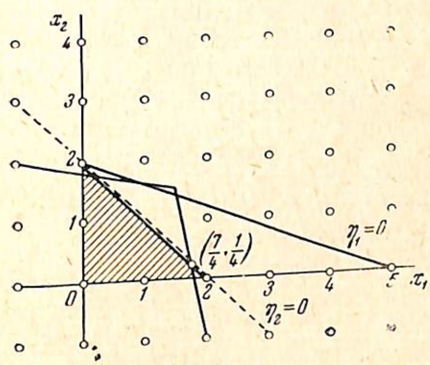

Рис. 3

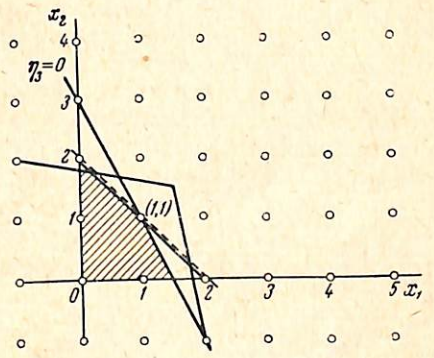

Рис. 4

и добавляем снизу соответствующую строку к табл. 1. Табл. 1 становится недопустимой. Дополнительное ограничение $\eta_1 \geqslant 0$ «отсекло» от множества планов задачи (33′)—(36′) план $(\overset{0}{x_1}, \overset{0}{x_2}) = (3/2, 3/2)$, но не «отсекло» ни одного целочисленного плана (см. рис. 2). Получилась новая задача линейного программирования, условия которой записаны в табл. 1 и изображены на рис. 2.

Продолжая действовать подобным же образом, мы еще два раза вводим дополнительное ограничение ($\eta_2 \geqslant 0$ и $\eta_3 \geqslant 0$) и, в конце концов, получаем решение исходной задачи (33)—(37) (см. табл. 2). Последовательное «отсечение» «промежуточных» нецелочисленных решений и получение окончательного решения изображено на рис. 1—4.

Гомори предложил также модификацию своего алгоритма, приспособленную для решения частично целочисленной задачи ЛП.

О решении задач специального вида. Многие задачи сводятся к задаче ЦЛП лишь после введения весьма большого количества переменных. Между тем, существующие методы решения общей задачи ЦЛП (и, в частности, наиболее апробированный из них — метод Гомори) пока что еще не позволяют решать задачи достаточно большого размера. Поэтому разрабатываются алгоритмы, использующие специфику определенных типов задач.

В качестве простого примера специализированного алгоритма можно упомянуть алгоритм для решения упомянутой выше задачи о ранце, использующий идею динамического программирования.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Б. С. Верховский. Постановка и интерпретация задач линейного программирования. Экономика и матем. методы, 1965, т. I, вып. 4.
2. Б. С. Верховский. Численные методы решения задач линейного программирования. Экономика и матем. методы, 1965, т. I, вып. 5.
3. Е. Г. Гольштейн, Д. Б. Юдин. Новые направления в линейном программировании. М., «Сов. Радио», 1965 (в печати).
4. Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. Задачи и методы линейного программирования. Изд. 2-е. М., «Сов. Радио», 1964.
5. А. А. Корбут. Целочисленные задачи линейного программирования. В сб. Экономико-матем. методы, вып. II. М., «Наука», 1965.

Поступила в редакцию
2 X 1965