ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1966
том II, вып. 2

КОЛИЧЕСТВЕННОЕ ОПИСАНИЕ ОПЕРАЦИИ

А. И. КАЦЕНЕЛИНБОЙГЕН, Ю. В. ОВСИЕНКО,
Е. Ю. ФАЕРМАН

(Москва)

При анализе сложной системы возникает вопрос о выборе элементарных для нее структурных единиц. Некоторые исследователи пытаются рассматривать «отрасли» в качестве элементарных единиц экономики. Не говоря уже о трудности определения самого понятия «отрасль», ясно, что как бы его ни трактовать, отрасль не может быть элементарной единицей системы. В ее внутренней структуре, а также в количественных характеристиках происходят серьезные сдвиги на протяжении отрезков времени, с которыми имеют дело, во всяком случае при перспективном планировании.

Если поступать последовательно, необходимо в конечном счете доходить до элементарных единиц, близких к тому, что называют *операциями* (определение дается ниже).

В настоящее время применяются два способа описания операции: нормативный, когда задается один или несколько векторов удельных расходов продуктов в процессе, и метод производственных функций, при котором указываются функциональные связи между различными параметрами процесса. Ни тот, ни другой не дают общего способа описания операции, пригодного для целей *оптимизации* производственных процессов.

Нормативный метод не дает полного описания, поскольку операции вообще допускают варьирование параметров. Если, например, при токарной обработке детали имеется возможность варьировать режимы резания, то нельзя заранее определить длительность этой операции и отсюда — нормативы использования станка, инструмента, энергии, рабочей силы. Нормативный подход, следовательно, означает априорную фиксацию величин, которые в действительности подлежат определению из решения оптимальной задачи.

Что же касается метода производственных функций, то часто, прибегая к нему, пытаются описать связи между выраженными в денежной форме параметрами процесса. Однако при решении проблем оптимального планирования нельзя исходить из априорно установленных цен.

Другое дело — производственные функции, основанные на описании технических связей между параметрами производственного процесса, выраженными в натуральной форме. Они могут оказаться весьма полезными для количественного описания операций. Однако при строгой постановке задачи оптимизации обычно оказывается необходимым использовать целую систему уравнений между параметрами операции (а не одно, как обычно предполагают в методе производственных функций). Кроме того, должны быть учтены ограничения в форме неравенств, связанные с возможностью осуществления того или иного процесса (например, усилие резания не может превысить величины, при которой начинается разрушение детали, резца и т. п.).

В предлагаемом описании операции мы исходим из того, что должна задаваться область ее технически допустимых режимов *. Поиск конкретных способов реализации операции должен осуществляться в процессе решения соответствующей оптимальной задачи.

Операция есть прежде всего процесс, происходящий при определенных условиях и связанный с потреблением и производством некоторых вещественных, энергетических или информационных компонентов.

Параметры, характеризующие совокупность условий, в которых протекает процесс, и непосредственно не связанные с расходами внешних для процесса компонентов, назовем *параметрами состояния*. Такими параметрами являются, например, скорости протекания процессов, температура, давление и т. п.

Параметры, характеризующие объемы потребления или производства участвующих в операции компонентов, назовем *расходными параметрами*.

Потребляемые компоненты будем называть также *входными*, а производимые — *выходными*. Среди потребляемых компонентов можно, вообще говоря, различать *преобразуемые* и *преобразующие* компоненты, что соответствует различным функциям, выполняемым ими в процессе осуществления операции. Преобразуемые компоненты отличаются тем, что они входят в измененном виде в состав *производимых* компонентов операции. Преобразующие компоненты связаны с использованием орудий производства. Последние, как правило, не входят во вновь созданный продукт, поэтому они потенциально могут участвовать в рассматриваемой операции многократно, хотя и подвергаются при этом некоторым изменениям.

Принимается, что каждое из орудий является вещественным компонентом некоторой особой операции — операции эксплуатации этого орудия. Специфический выходной компонент этой операции — работа орудия — поступает в рассматриваемую операцию в качестве преобразующего компонента ее. Этот компонент можно рассматривать наряду с указанными выше преобразуемыми компонентами в качестве входного компонента операции.

Аналогично можно описать и участие человека в данной операции. Будем считать, что человек является основным преобразуемым компонентом определенной «операции» — жизнедеятельности этого человека, а особый выходной компонент ее — *деятельность* этого человека — поступает в рассматриваемую операцию в качестве ее преобразующего компонента.

В дальнейшем все как входные, так и выходные компоненты операции будем называть ее внешними *продуктами*. Множество всех внешних продуктов операции будем называть ее *номенклатурой*.

Операцию можно определить ближе как процесс, могущий быть полностью описанным единой системой механических, физико-химических, биологических и других закономерностей, а также технических связей и условий. Такое описание предполагает возможность количественных вариаций всех характеризующих процесс параметров, но устанавливает зависимости между ними и ограничения, вытекающие из упомянутых закономерностей и условий. Оно указывает технологически допустимую область таких вариаций, при которых сохраняется качественная определенность процесса. Заметим также, что в понятие качественной определенности процесса входит требование жесткой номенклатуры участвующих в нем компонентов. Это значит, что в пределах технологически допустимой области полный расход всякого потребляемого или производимого продукта должен быть отличен от нуля.

---

* Требование целочисленности некоторых компонентов, участвующих в операции, здесь не рассматривается.

Время, отсчитанное от начала выполнения операции, будем называть ее *собственным временем* или *фазой* и обозначим через τ. Длительность цикла преобразования будем обозначать через τ_1. Очевидно, что

$$0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1. \tag{1}$$

Как расходные, так и параметры состояния операции вообще должны быть функциями фазы. Будем называть их поэтому иногда функциональными параметрами.

Обозначим совокупность (вектор) параметров состояния через

$$\beta(\tau) = (\beta^0(\tau),\ \beta^1(\tau), \ldots, \beta^l(\tau), \ldots, \beta^{M(L)-1}(\tau)).$$

Здесь L — множество индексов параметров состояния, а $M(L)$ — число элементов (мощность) конечного множества L. (Обозначением M для числа элементов конечного множества будем пользоваться и в дальнейшем.)

В частности, одним из параметров состояния будем считать $\beta^0(\tau) = \tau$.

Расходные параметры должны определять производство и потребление — общее, расходы — внешних продуктов на всех фазах процесса. Будем считать, что расход внешнего продукта n на бесконечно малом интервале фаз от τ до $\tau + d\tau$ может быть представлен в виде

$$dm^n(\tau) = x^n(\tau)\, d\tau. \tag{2}$$

Величину x^n будем называть *расходом продукта n* на фазе τ. Очевидно, что множество внешних параметров операции определяется множеством внешних продуктов ее, т. е. номенклатурой операции N. Обозначим далее через ${}^iN$ и ${}^eN$ номенклатуры соответственно потребляемых и производимых в операции продуктов, будем называть их также соответственно *входной* и *выходной* номенклатурами. Очевидно, что $N = {}^iN \cup {}^eN$.

Если продукт n является потребляемым в данной операции, т. е. $n \in {}^iN$, то расход его в производственном процессе будем называть также потреблением и считать величиной положительной. Точно так же, если $n \in {}^eN$, то расход этого продукта будем называть производством и считать отрицательной величиной.

Расходные параметры могут увеличиваться или уменьшаться в одно и то же число раз при заданном векторе параметров состояния. На основании этого расходные параметры $x^n(\tau)$ можно называть также *экстенсивными параметрами* операции.

Вектор расходных параметров $x^n(\tau)$ для всех $n \in \mathrm{N}$ обозначим $\mathrm{x}(\tau) = (x^1(\tau), x^2(\tau), \ldots, x^n(\tau), \ldots, x^{M(N)}(\tau))$.

Относительно характера функциональных зависимостей параметров операции от фазы в сегменте $[0, \tau_1]$ необходимо предположить следующее.

Существует конечное множество Q точек τ^q $(q = 0, 1, 2, \ldots, M(Q) - 1)$, в которых некоторые функции $x^n(\tau)$ и $\beta^l(\tau)$ или их производные терпят разрыв. При этом всегда будет предполагаться, что $\tau^0 = 0$, $\tau^{M(Q)-1} = \tau_1$.

В остальных точках этого сегмента функции $x^n(\tau)$ и $\beta^l(\tau)$ вместе с их производными непрерывны.

Следовательно, предполагается, что функции $x^n(\tau)$ и $\beta^l(\tau)$ являются кусочно-дифференцируемыми в сегменте $[0, \tau_1]$ *.

Например, разрывы функций $x^n(\tau)$ в некоторых точках τ^q могут иметь место в силу того, что потребление или производство продукта n происходит лишь на соответствующих изолированных фазах операции. Часто

---

* Имеется в виду, что дифференцируемость распространяется на те порядки производных, которые фигурируют в рассматриваемых ниже технологических ограничениях.

встречающиеся случаи — потребление входного продукта лишь на фазе $\tau = 0$ или производство выходного продукта лишь на фазе $\tau = \tau_1$. Чтобы включить такие случаи в принятый способ описания процесса, достаточно предположить, что зависимость $x^n(\tau)$ здесь тоже существует и имеет вид:

$$x^n(\tau) = \sum_{q \in Q} \delta(\tau - \tau^q)\, x_q{}^n, \tag{3}$$

где $\delta(\tau - \tau^q)$ — дельта-функция, а $x_q{}^n$ — конечное количество продукта, расходуемого на изолированной фазе τ^q.

Выражение для производства или потребления продукта на интервале фаз от τ до $\tau + \Delta\tau$ тогда может быть получено следующим образом. На основании (2) и (3) имеем

$$\Delta m^n(\tau) = \int\limits_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} x^n(\tau)\, d\tau.$$

Предполагая, что $\Delta\tau < \min\limits_q (\tau_{q+1} - \tau_q)$, получим в силу (3) и по определению дельта-функции

$$\int\limits_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \delta(\tau - \tau^q)\, x_q{}^n\, d\tau = x_q{}^n,$$

если $\tau \leqslant \tau^q \leqslant \tau + \Delta\tau$, и этот же интеграл равен нулю, если ни одно τ^q не принадлежит сегменту $[\tau, \tau + \Delta\tau]$.

Следовательно,

$$\Delta m^n(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{если сегмент } [\tau, \tau+\Delta\tau] \text{ не содержит ни одного } \tau^q, \\ x_q{}^n, & \text{если } \tau \leqslant \tau^q \leqslant \tau + \Delta\tau. \end{cases} \tag{4}$$

Таким образом, представление о непрерывном распределении потребления или производства некоторого продукта n по фазе операции τ и понятие расхода продукта $x^n(\tau)$ в данной точке (которое по сути дела дает плотность этого распределения по фазе) могут быть обобщены на случай, когда продукт n расходуется в конечных количествах лишь на изолированных фазах τ^q.

Правда, при этом приходится допускать разрывы типа обращения в бесконечность (точнее — типа дельта-функции) функции $x^n(\tau)$ в соответствующих точках τ^q.

Наряду с таким типом разрывов могут иметь место также и конечные разрывы как самих функций $x^n(\tau)$ и $\beta^l(\tau)$, так и их производных. Например, при операции строгания многие из параметров $x^n(\tau)$ и $\beta^l(\tau)$ будут испытывать конечные разрывы в точках, где рабочий ход сменяется холостым, и наоборот (в частности, расход стружки, глубина, усилие и скорость резания и т. п.). Часто такие разрывы возникают вследствие того, что один из продуктов n операции потребляется лишь в соответствующих изолированных точках.

Например, подача воздуха в вагранку осуществляется в месте расположения фурм, т. е. в определенной промежуточной точке процесса плавки. Ясно, что температурные характеристики процесса, а также величины, характеризующие концентрации газовых компонентов, должны испытывать скачки или изломы (скачки производных) в соответствующей точке.

Следовательно, в то время как функция $x^n(\tau)$ для расходуемого в изолированной точке продукта терпит бесконечный разрыв, для остальных функций или их производных могут иметь место конечные разрывы.

В этом случае уравнение (2) действительно лишь для точек τ, не являющихся точками разрыва, и таких малых $d\tau$, что сегмент $[\tau, \tau + d\tau]$ не содержит точек разрыва.

Значения функций $x^n(\tau)$, $\beta^l(\tau)$ и их производных, испытывающих разрыв в точке τ^q, будем обозначать в дальнейшем следующим образом: слева от τ^q — $x^n(\tau_-{}^q) = x_{q-}{}^n$, $\beta^l(\tau_-{}^q) = \beta_{q-}{}^l$ и т. д., справа от τ^q — $x^n(\tau_+{}^q) = x_{q+}{}^n$, $\beta^l(\tau_+{}^q) = \beta_{q+}{}^l$ и т. д.

Выберем теперь некоторый продукт $\bar{n} \in N$, который будем называть *основным продуктом,* и выберем ту фазу τ, для которой

$$|x^{\bar{n}}(\bar{\tau})| > 0.$$

Рассмотрим далее отношения

$$\alpha^n(\tau) = \frac{x^n(\tau)}{|x^{\bar{n}}(\bar{\tau})|}, \tag{5}$$

которые будем называть *удельными расходами* продуктов на соответствующих фазах τ.

Совокупность удельных расходов продуктов n образует $M(N)$-мерный вектор удельных расходов операции

$$\alpha(\tau) = (\alpha^1(\tau), \alpha^2(\tau), \ldots, \alpha^n(\tau), \ldots, \alpha^{M(N)}(\tau)).$$

Параметры состояния $\beta^l(\tau)$ и удельные расходы продуктов $\alpha^n(\tau)$ можно назвать *интенсивными параметрами* операции в отличие от расходов $x^n(\tau)$, являющихся экстенсивными характеристиками ее.

Совокупность интенсивных параметров образует $M(N) + M(L)$-мерный вектор

$$\xi(\tau) = (\xi^1(\tau), \ \xi^2(\tau), \ldots, \xi^m(\tau), \ldots, \xi^{M(N)+M(L)}(\tau)),$$

где первые $M(N)$ компонент совпадают с соответствующими удельными расходными параметрами

$$\xi^m = \alpha^n \tag{6}$$

при $m = n$, а все последующие компоненты — с соответствующими параметрами состояния

$$\xi^m = \beta^l \tag{6'}$$

при $m = l + M(N) + 1$.

Переходя теперь к описанию общей формы, в которой может быть задана технологически допустимая область осуществления производственного процесса операции, заметим прежде всего, что такое описание должно включать лишь интенсивные параметры операции $\alpha^n(\tau)$ и $\beta^l(\tau)$. Процесс, допустимый по таким своим параметрам при одном значении $x^{\bar{n}}(\bar{\tau})$ и, следовательно, соответствующей системе экстенсивных параметров $x^n(\tau) = \alpha^n(\tau)\,|x^n(\tau)|$ с технологической точки зрения будет допустим и при любом другом значении $x^n(\tau)$ (и соответствующих $x^n(\tau)$).

В дальнейшем принимается, что технологически допустимая область реализации операции описывается следующими типами соотношений между ее интенсивными параметрами:

$$\text{I. } F[\xi(\tau), \xi'(\tau), \ldots, \xi^p(\tau), \ldots, \xi^P(\tau), \xi_q, \xi_q', \ldots, \xi_q{}^p, \ldots, \xi_q{}^P] \leqslant 0, \tag{7}$$

$$\text{II. } F_1[\xi(\tau), \xi'(\tau), \ldots, \xi^p(\tau), \ldots, \xi^P(\tau), \xi_q, \xi_q', \ldots, \xi_q{}^p, \ldots, \xi_q{}^P] = 0.$$

Здесь F и F_1 — вектор-функции определенных размерностей J и J_1, дифференцируемые по своим аргументам $\xi, \xi', \ldots, \xi^P$ нужное число раз.

Под ξ_q разумеются ξ_{q-}, ξ_{q+}, а также величины типа $\xi_q{}^n = x_q{}^n / |\overline{x^n(\tau)}|$ *. Эти величины в дальнейшем будут играть роль параметров, определяющих функциональные зависимости $\xi(\tau)$. Будем называть их поэтому числовыми параметрами операции.

$\xi'(\tau), \ldots, \xi^P(\tau)$ обозначают производные функций вплоть до некоторого (конечного) порядка P, а $\xi_q{}', \ldots, \xi_q{}^p$ — их значения в точках $\tau_-{}^q$ и $\tau_+{}^q$.

Обозначая номер компоненты вектор-функций F и F_1 через j, имеем для неравенств (7) $j = 1, 2, \ldots, J$, а для равенств (7) $j = J+1, J+2, \ldots, J+J_1$.

Каждое (j-е) из соотношений (7) может быть определено не на всем сегменте $[0, \tau_1]$, а лишь между двумя какими-нибудь характерными точками $\tau^{q_j'}$ и $\tau^{q_j''}$. В дальнейшем будем подразумевать, что для каждого из соотношений (7) задана область его определения в виде

$$\tau^{q_j'} \leqslant \tau \leqslant \tau^{q_j''}, \quad q_j' \in Q, \quad q_j'' \in Q. \tag{7'}$$

Компоненты вектор-функций F и F_1 могут в частных случаях содержать только:

1. ξ_q,
2. $\xi(\tau)$,
3. $\xi(\tau)$, ξ_q.
4. $\xi(\tau)$, $\xi'(\tau), \ldots, \xi^P(\tau)$.

Для упрощения записи введем в рассмотрение двумерную матричную функцию скалярного аргумента

$$\Xi(\tau) = \|\xi_{mp}(\tau)\|, \tag{8}$$

где

$$\xi_{mp}(\tau) = \frac{d^p \xi^m(\tau)}{d\tau^p}, \tag{9}$$

и трехмерную матрицу

$$\Xi^Q = \|\xi_{mp\varkappa}\|, \tag{10}$$

где

$$\xi_{mpq} = \left(\frac{d^p \xi^m}{d\tau^p}\right)_{\tau=\tau^q}, \tag{11}$$

$$q = E\left(\frac{\varkappa - 1}{2}\right) \tag{12}$$

$\left(E\left(\frac{\varkappa-1}{2}\right) \right.$— целая часть от числа$\left.\left(\frac{\varkappa-1}{2}\right)\right)$ и $\tau^q = \tau_-{}^q$ при $\varkappa$ нечетном и $\tau^q = \tau_+{}^q$ при $\varkappa$ четном.

Размерности этих матриц следующие:

$$m = 1, 2, \ldots, M(N) + M(L),$$
$$p = 0, 1, 2, \ldots, P,$$
$$\varkappa = 1, 2, \ldots, 2M(Q).$$

---

* В дальнейшем для идентификации выражений будем величину $\xi_q{}^n$ называть значением интенсивного параметра $\xi^n(\tau)$ в точке τ^q и считать, что $\xi^n(\tau_-{}^q) = \xi^n(\tau_+{}^q) = \xi^n(\tau_-{}^q) = \xi_q{}^n$. (В буквальном смысле слова в этом случае $\xi^n(\tau^q) = \dfrac{x^n(\tau^q)}{|\overline{x^n(\tau)}|} = \infty$).

$\varkappa$ есть номер точки τ_-^q или τ_+^q в следующем ряду:

$$\tau_-^0, \tau_+^0, \tau_-^1, \tau_+^1, \ldots, \tau_-^{M(Q)-1}, \tau_+^{M(Q)-1}.$$

Легко проверить, что для каждого из перечисленных $\varkappa$ соотношение (12) определяет номер q соответствующей точки, а нечетность или четность $\varkappa$ — является она соответственно τ_-^q или τ_+^q.

Для двух последовательных номеров $\varkappa$ (из которых первый нечетный) q остается неизменным, а знак при τ^q меняется с минуса на плюс.

С помощью введенных обозначений соотношения (7) могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} &\text{I. } \Phi[\Xi(\tau), \Xi^Q] \leqslant 0, \\ &\text{II. } \Phi_1[\Xi(\tau), \Xi^Q] = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Каждое из соотношений (13) определяется на области вида (7′).

Равенства (13) могут выражать:

1. Связи между параметрами операции, вытекающие из определений соответствующих величин. Например, вес отливки определяется ее объемом и удельным весом чугуна.

2. Механические, физико-химические и другие закономерности процесса. Например, при токарной обработке усилие резания выражается через глубину и скорость резания; в химических процессах действуют кинетические и термодинамические закономерности, связывающие подводимое и выделяемое в ходе реакции тепло с температурой и давлением в реакторе, концентрациями реагирующих веществ и т. п.

3. Технические (в частности, эмпирические, статистические) связи между параметрами. Например, при вытягивании стеклянных трубок и полос толщина получаемых изделий зависит от температуры и качества расплава стекла и от скорости вытяжки. Сюда же относятся представления некоторых интенсивных параметров операции в виде известных по характеру функций от фазы $\xi(\tau)$, в которых остаются неопределенными лишь некоторые числовые параметры (обычно имеются один-два таких параметра, и соответствующая функциональная зависимость представляется, следовательно, одно- или двухпараметрическим семейством функций). Мы будем предполагать, что вид указываемой таким образом функциональной зависимости допускает выражение параметров ее через значения функций $\xi(\tau)$ и их производных в точках τ_{q_1} и τ_{q_2}, являющихся крайними точками интервала, на котором эти функции определяются. Тогда выражения, представляющие вид такого рода эмпирически установленных функциональных зависимостей, могут быть сведены к общей форме (13). Действительно, они будут иметь вид

$$\xi(\tau) = \varphi[\tau, \xi_{q_1}, \xi_{q_1}', \ldots, \xi_{q_2}, \xi_{q_2}', \ldots]$$

или

$$\xi(\tau) - \varphi[\tau, \xi_{q_1}, \xi_{q_1}', \ldots, \xi_{q_2}, \xi_{q_2}', \ldots] = 0,$$

что совпадает с (13). Например, часто встречающимся является случай, когда некоторые интенсивные параметры операции могут быть приняты постоянными, т. е. не зависящими от фазы. Так, число оборотов шпинделя во время большинства токарных, фрезерных, сверлильных, шлифовальных работ может быть принято постоянным. Это следует из конструкции большинства соответствующих станков (отсутствие бесступенчатой регулировки числа оборотов). Точно так же скорость резания при обработке цилиндрической детали является постоянной по фазе. Это вытекает из соображения равноправности всех участков обрабатываемой поверхности, в силу которого нецелесообразно было бы изменять величины поперечной и продольной подач при переходе от одного такого участка к другому.

В качестве третьего примера можно привести предположение о постоянстве давления или температуры во многих типах химических реакторов. Такие предположения обычно являются следствием эмпирического обобщения сведений о всей совокупности процессов, с которыми в них имеют дело.

Если такого рода предположение о постоянстве некоторой величины ξ^m действительно для участка между точками τ^q и τ^{q+1} (например, между началом и концом отдельного прохода при токарной обработке цилиндрической детали), то имеем $\xi^m(\tau) = \xi^m(\tau_+{}^q)$, $\tau_+{}^q \leqslant \tau \leqslant \tau_-{}^{q+1}$ или

$$\xi^m(\tau) - \xi^m(\tau_+{}^q) = 0, \quad \tau_+{}^q \leqslant \tau \leqslant \tau^{q+1}.$$

Эти соотношения имеют вид (13).

Другой распространенный случай — расход некоторых продуктов лишь на изолированных фазах процесса τ^q. Как видно из выражения (3), соответствующий удельный расходный параметр, согласно (5), будет иметь вид

$$\xi^m(\tau) = \sum_q \delta(\tau - \tau^q)\,\xi_q{}^m.$$

Поскольку, как сказано выше, величины $\xi_q{}^m$ считаются входящими во всю совокупность числовых параметров, уравнение

$$\xi^m(\tau) - \sum_q \delta(\tau - \tau^q)\,\xi_q{}^m = 0$$

также является частным случаем уравнения (13).

Если относительно некоторого параметра $\xi^m(\tau)$ может быть сделано предположение о его линейной зависимости от фазы в интервале от τ^q до τ^{q+1}, то имеем, очевидно:

$$\xi^m(\tau) = \frac{\xi_{(q+1)-} - \xi_{q+}}{\tau_-{}^{q+1} - \tau_+{}^q}\,\tau,$$

откуда

$$\xi^m(\tau)\,(\tau_-{}^{q+1} - \tau_+{}^q) - [\xi_{(q+1)-} - \xi_{q+}] = 0,$$
$$\tau_+{}^q \leqslant \tau \leqslant \tau_-{}^{q+1},$$

т. е. опять-таки уравнение вида (13).

В качестве последнего примера рассмотрим случай, когда относительно некоторого параметра $\xi^m(\tau)$ может быть выдвинуто утверждение об экспоненциальном уменьшении его (для определенности) при изменении фазы от τ^{q_1} до τ^{q_2}. В этом случае имеем

$$\xi^m(\tau) = be^{-p\tau},$$

где b и p должны рассматриваться как варьируемые параметры экспоненты.

Полагая $\tau = \tau_+{}^{q_1}$ и $\tau = \tau_-{}^{q_2}$, получим отсюда

$$\xi_{q_1+}{}^m = be^{-pq_1+}, \quad \xi_{q_2-}{}^m = be^{-pq_2-}.$$

Из этих двух уравнений могут быть найдены числовые параметры b и p. Именно, легко видеть, что

$$p = \frac{\ln \xi^m_{q_1+} - \ln \xi^m_{q_2-}}{\tau_-^{q_2} - \tau_+^{q_1}}, \quad b = \frac{(\xi^m_{q_1+})^{\frac{\tau_-^{q_2}}{\tau_-^{q_2}-\tau_+^{q_1}}}}{(\xi^m_{q_2-})^{\frac{\tau_-^{q_1}}{\tau_-^{q_2}-\tau_+^{q_1}}}}.$$

Следовательно, находим

$$\xi^m(\tau) = \frac{(\xi^m_{q_1+})^{\frac{\tau_-^{q_2}}{\tau_-^{q_2}-\tau_+^{q_1}}}}{(\xi^m_{q_2-})^{\frac{\tau_+^{q_1}}{\tau_-^{q_2}-\tau_+^{q_1}}}} \frac{(\xi^m_{q_2-})^{\frac{\tau}{\tau_-^{q_2}-\tau_+^{q_1}}}}{(\xi^m_{q_1+})^{\frac{\tau}{\tau_-^{q_2}-\tau_+^{q_1}}}} = \frac{(\xi^m_{q_2-})^{\frac{\tau-\tau_+^{q_1}}{\tau_-^{q_2}-\tau_+^{q_1}}}}{(\xi^m_{q_1+})^{\frac{\tau-\tau_-^{q_2}}{\tau_-^{q_2}-\tau_+^{q_1}}}}$$

или

$$\xi^m(\tau)(\xi^m_{q_1+})^{\frac{\tau-\tau_-^{q_2}}{\tau^{q_2}-\tau_+^{q_1}}} - (\xi^m_{q_2-})^{\frac{\tau-\tau_+^{q_1}}{\tau_-^{q_2}-\tau_+^{q_1}}} = 0.$$

Мы опять пришли к уравнению типа (13).

Неравенства (13) могут выражать:

1. Границы качественной определенности технологического процесса. Например, для химических реакций в жидкой фазе температура и давление не должны доходить до границ, соответствующих переходу в твердую или газообразную фазу.

2. Пределы, за которыми осуществление производственного процесса становится явно нецелесообразным во всей области предвидимых ситуаций (границы эффективности). Например, априорно представляется нецелесообразным уменьшение температуры в реакторе за точку, где начинается резкое падение скорости полезной реакции.

И те и другие границы могут определяться как путем теоретического изучения процесса, так и эмпирически.

3. Некоторые общие свойства искомых функциональных зависимостей интенсивных параметров операции от фазы. Сюда входят сведения, в частности, о монотонном возрастании или убывании соответствующих функций. Например, давление в нефтепроводе монотонно падает на участках между двумя компрессорными станциями. Напряжение тока в линии электропередачи точно так же монотонно убывает на участке между двумя соседними трансформаторными подстанциями и т. п.

Пусть в уравнения (13), зависящие от матрицы $\Xi(\tau)$, входит S' числовых параметров. Пусть далее для получения точного решения системы дифференциальных уравнений, входящих в (13), необходимо сверх того знание еще S'' числовых параметров. Такие $S = S' + S''$ числовых параметров будем называть *основными*.

Не все из основных параметров являются независимыми. Для определения связей между ними можно было бы поступить следующим образом. Рассмотрим некоторое из уравнений (13).

Пусть оно соответствует j-й компоненте вектор-функции $F_1(J < j \leqslant J + J_1)$. Обозначим через $P_j{}^m$ порядок старшей производной параметра ξ^m в этом уравнении, а через P^m — порядок старшей производной параметра ξ^m во всей системе (13). Обозначим далее через $P_j = \min\limits_m (P^m - P_j{}^m)$.

Рассмотрим теперь систему уравнений, получающуюся из (13) присоединением к каждому из уравнений $F_j = 0$ дополнительных уравнений вида

$$\frac{dF_j}{d\tau} = 0, \quad \frac{d^2F_j}{d\tau^2} = 0, \ldots, \quad \frac{d^{(P_j)}F_j}{d\tau^{P_j}} = 0.$$

Положим затем последовательно в этих уравнениях

$$\tau = \tau_-^0, \quad \tau = \tau_-^1, \ldots, \tau = \tau_-^{M(Q)-1},$$

$$\tau = \tau_+^0, \quad \tau = \tau_+^1, \ldots, \tau = \tau_+^{M(Q)-1},$$

причем в каждое из уравнений подставляются лишь те из перечисленных значений, которые попадают в область его определения.

Тогда получим систему уравнений $\varphi(\Xi^Q) = 0$.

Это и есть система уравнений, связывающих между собой числовые параметры операции, которую можно получить на данном этапе преобразований.

Совокупность действий, приводящих от (13) к найденной системе, будем называть дифференциальной Q-подстановкой.

Можно говорить и о Q-подстановке в функции, например, $F_1(\Xi(\tau), \Xi^Q)$ или $\xi(\tau)$, результатом которой будут просто соответствующие наборы чисел.

Для определения уравнений, действительно связывающих между собой *основные* параметры, нет необходимости, однако, рассматривать всю эту систему уравнений. В самом деле, предположим, что нам удалось выделить из нее подсистему

$$\bar{\varphi}(\Xi^Q) = 0, \tag{14}$$

обладающую следующим свойством. Какую бы группу из не входящих в нее уравнений мы ни рассмотрели, количество числовых параметров в ней, не входящих в подсистему (14), не меньше числа независимых уравнений этой группы. Тогда очевидно, что все действительные ограничения, накладываемые на основные переменные, содержатся в уравнениях (14), в то время как остальные уравнения могут служить лишь для определения некоторых неосновных числовых параметров (в частности, к таким уравнениям относятся соотношения, разрешенные относительно неосновных переменных, не входящих в подсистему (14)).

Предположим теперь без ограничений общности, что подсистему (14) можно разрешить относительно некоторого числа параметров. Если при этом она допускает в равной степени разрешение как относительно основного параметра, так и относительно неосновного, будем отдавать предпочтение последнему. Из основных параметров будем разрешать систему лишь относительно тех из них, которые непосредственно входят в уравнения (13), зависящие не только от Ξ^Q, но и от $\Xi(\tau)$. Те из полученных уравнений, которые выражают неосновные переменные, будут того же типа, что и не входящие в подсистему (14) уравнения, в том смысле, что они не накладывают никаких ограничений на основные параметры, а служат лишь для определения некоторых неосновных. Эти уравнения могут быть поэтому исключены из дальнейшего рассмотрения. Обозначая далее через $\bar{\Xi}^Q$ матрицу основных параметров, которые входят в число тех из них, относительно которых подсистема (14) разрешена, а через $\tilde{\Xi}^Q$ — матрицу тех параметров, через которые первые выражаются, приходим к выводу, что подсистема (14) может быть заменена следующей:

$$\bar{\Xi}^Q = \tilde{\Psi}^Q(\tilde{\Xi}^Q), \tag{15}$$

$$\tilde{\varphi}(\tilde{\Xi}^Q) = 0. \tag{16}$$

Если некоторый числовой параметр $\xi_{mp\varkappa}$ не входит в систему (14), то его на данном этапе следует рассматривать как свободный. Будем предполагать, что в выражения (15) включаются тогда тождественные соотношения вида $\xi_{mp\varkappa} = \xi_{mp\varkappa}$, а матрица $\tilde{\Xi}^Q$ расширена за счет включения этих параметров. При этом условии матрица $\tilde{\Xi}^Q$ определяет с помощью (15) *все* основные параметры, не входящие в нее. Но тем самым она определяет вообще *все* основные параметры операции. Если обозначить, следовательно, через $\overset{0}{\Xi}{}^Q$ матрицу всех *основных* параметров, то соотношение (15) может быть обобщено следующим образом:

$$\overset{0}{\Xi}{}^Q = \overset{0}{\Psi}{}^Q(\tilde{\Xi}^Q). \tag{17}$$

Матрицы $\bar{\Xi}^Q$, $\tilde{\Xi}^Q$ и $\overset{0}{\Xi}$ можно представлять себе одной размерности, но на месте тех числовых параметров, которые не входят в соответствующее множество, у них стоят элементы, равные 0.

Исходная система технологических ограничений (13) может быть теперь приведена к следующему виду:

$$\tilde{\Phi}(\Xi(\tau),\ \tilde{\Xi}_1{}^Q) \leqslant 0,\quad \tilde{\Phi}_1(\Xi(\tau),\ \tilde{\Xi}^Q) = 0,\quad \tilde{\varphi}(\tilde{\Xi}^Q) = 0. \tag{18}$$

Здесь $\tilde{\Phi}$ и $\tilde{\Phi}_1$ получаются из соответствующих компонент Φ и Φ_1 в (13) путем подстановки в них выражений (15). Матрица $\tilde{\Xi}_1{}^Q$ может содержать, кроме элементов $\tilde{\Xi}^Q$, еще те числовые параметры, которые не входят в систему (14). Такое обозначение будет использоваться и в дальнейшем.

Уравнения (13), зависящие только от Ξ^Q, целиком включаются в систему числовых уравнений, возникающую в результате Q-подстановки, а затем преобразуются вместе с другими в соотношения (15) и (16). Поэтому в системе (18) их нужно относить к последнему типу уравнений, в то время как функции $\tilde{\Phi}_1$ следует считать обязательно зависящими от $\Xi(\tau)$.

Весь процесс перехода от (13) к системе (18) будем называть *выделением минимальной системы числовых уравнений.*

Матрицу $\tilde{\Xi}^Q$ назовем *минимальной* матрицей числовых параметров для этого этапа преобразования, а отличные от нуля элементы ее — *существенными* параметрами.

Предположим далее опять-таки без ограничения общности, что в системе (18) уравнения $\tilde{\Phi}_1 = 0$ разрешимы относительно некоторого числа функциональных параметров, образующих вектор $\bar{\xi}(\tau)$, в том смысле, что они могут быть эквивалентным образом заменены уравнениями вида

$$\bar{\xi}(\tau) = \tilde{\psi}(\hat{\Xi}(\tau), \tilde{\Xi}^Q, \tau), \tag{19}$$

$$\tilde{\tilde{\Phi}}_1(\hat{\Xi}(\tau), \tilde{\Xi}^Q, \tau) = 0. \tag{20}$$

Здесь $\tilde{\tilde{\Phi}}_1$ — вектор-функция (вообще меньшей размерности, чем $\tilde{\Phi}_1$). Ее компоненты — некоторые из компонент вектор-функции $\tilde{\Phi}_1$, в которой функциональные параметры $\bar{\xi}(\tau)$ выражены через $\hat{\Xi}(\tau)$ по (19). Сюда входят те из компонент $\tilde{\Phi}_1$, которые не обращаются тождественно в нуль при подстановке в них выражений (19).

Если некоторые из выражений (19) получены при помощи интегрирования, то, применяя к ним операцию дифференциальной Q-подстановки, можно получить дополнительные уравнения, связывающие между собой существенные параметры.

Выделяя затем из вновь полученных уравнений

$$\bar{\bar{\varphi}}(\tilde{\Xi}^Q) = 0 \tag{21}$$

совместно с (16) минимальную систему таким же образом, как и прежде, получим

$$\tilde{\Xi}^Q = \tilde{\tilde{\Psi}}{}^Q(\tilde{\tilde{\Xi}}{}^Q), \tag{22}$$

$$\tilde{\tilde{\varphi}}(\tilde{\tilde{\Xi}}{}^Q) = 0, \tag{23}$$

так что система технологических ограничений (18) примет вид

$$\begin{aligned} &1.\ \tilde{\tilde{\Phi}}(\hat{\Xi}(\tau),\ \tilde{\tilde{\Xi}}_1^Q,\ \tau), \\ &2.\ \tilde{\tilde{\Phi}}_2(\hat{\Xi}(\tau),\ \tilde{\tilde{\Xi}}^Q,\ \tau) = 0, \\ &3.\ \tilde{\tilde{\varphi}}(\tilde{\tilde{\Xi}}^Q) = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

При этом, согласно (17) и (22), вся совокупность основных параметров Ξ^Q сейчас же определяется по Ξ^Q:

$$\overset{0}{\Xi}{}^Q = \overset{0}{\tilde{\tilde{\Psi}}}(\tilde{\tilde{\Xi}}^Q), \tag{25}$$

а функциональные параметры $\xi(\tau)$, согласно (19) и (22),— по $\hat{\Xi}(\tau)$ и $\tilde{\tilde{\Xi}}^Q$:

$$\bar{\xi}(\tau) = \tilde{\tilde{\psi}}(\hat{\Xi}(\tau),\ \tilde{\tilde{\Xi}}^Q,\ \tau). \tag{26}$$

Пусть далее некоторые ненулевые элементы матрицы $\tilde{\tilde{\Xi}}^Q$, входящие в (26), но не в (24), при помощи (16) и (21) или в силу своего определения могут быть представлены в виде функционалов от $\hat{\Xi}(\tau)$. (Например, этот случай имеет место, если эти параметры являются значениями функций $\xi^m(\tau) \in \hat{\Xi}(\tau)$ в некоторых точках $q \in Q$ или определяются величинами типа

$$\int\limits_{\tau^{q_1}}^{\tau^{q_2}} f(\xi^m(\tau))\,d\tau,\ \ \xi^m(\tau) \in \hat{\Xi}(\tau).$$

Последние возникают при Q-подстановке в соотношения (19), полученные при помощи интегрирования*. Тогда обозначим через $\hat{\Xi}^Q$ матрицу, полученную из $\tilde{\tilde{\Xi}}^Q$ отбрасыванием таких параметров. Соотношения (24) непосредственно преобразуются в

$$\begin{aligned} &1.\ \hat{\Phi}(\hat{\Xi}(\tau),\ \hat{\Xi}_1^Q,\ \tau) \leqslant 0, \\ &2.\ \hat{\Phi}_1(\hat{\Xi}(\tau),\ \hat{\Xi}^Q,\ \tau) = 0, \\ &3.\ \hat{\varphi}(\hat{\Xi}^Q) = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Что же касается выражений (25) и (26), то поскольку по условию можно записать

$$\tilde{\tilde{\Xi}}^Q = G(\hat{\Xi}(\tau)), \tag{28}$$

а $\hat{\Xi}(\tau)$, согласно (27), определяется лишь матрицей $\hat{\Xi}^Q$, заключающей всю необходимую для этого совокупность параметров

$$\hat{\Xi}(\tau) = \hat{\Xi}(\hat{\Xi}^Q,\ \tau), \tag{29}$$

имеем, очевидно:

$$\tilde{\tilde{\Xi}}^Q = G(\hat{\Xi}(\hat{\Xi}^Q,\ \tau)) = \hat{\Psi}^Q(\hat{\Xi}^Q), \tag{30}$$

---

* Отметим, что величины указанного типа должны рассматриваться вообще на данном этапе наряду с $\xi^m(\tau^q)$, $\left(\frac{d\xi^m}{d\tau}\right)\tau^q$ и т. д. как обобщение понятия числового параметра (результат Q-подстановки не в производную, а в первообразную функцию для $\xi^m(\tau)$. Матрицы Ξ^Q также будем понимать в нужном случае как соответствующим образом расширенные.

откуда по (25) и (26)

$$\overset{0}{\Xi}{}^{Q} = \overset{0}{\hat{\Psi}}(\hat{\Xi}^{0}) \tag{31}$$

и

$$\bar{\xi}(\tau) = \hat{\psi}(\hat{\Xi}(\tau),\ \hat{\Xi}^{Q},\ \tau). \tag{32}$$

Следовательно, знание матриц $\hat{\Xi}^{Q}$ и $\hat{\Xi}(\tau)$, удовлетворяющих (27), достаточно для определения всех остальных числовых и функциональных параметров операции. В соответствии с этим будем называть существенные параметры, входящие в $\hat{\Xi}^{Q}$, *определяющими параметрами*, а функциональные, входящие в $\hat{\Xi}(\tau)$ — *определяющими функциями*.

Приведение технологических ограничений к виду (24) будем называть выделением определяющих функций, а к виду (27) — выделением определяющих параметров. Самую форму (27) будем называть *определяющей формой* технологических ограничений.

Она является общей формой, к которой может быть приведена всякая система технологических ограничений вида (13).

Пусть число определяющих параметров равно $\hat{S}^{Q}$, число независимых уравнений, связывающих их, $\hat{J}^{Q}$, далее число определяющих функций операции $\hat{S}$, а число независимых уравнений системы (24.2) $\hat{J}$.

Тогда число определяющих параметров, которые могут независимым образом меняться в некоторой области, будет

$$S^{Q} = \hat{S}^{Q} - \hat{J}^{Q},$$

а число определяющих функций, также могущих независимым образом выбираться из некоторого класса

$$\sigma = \hat{S} - \hat{J}_1.$$

Полагая, что каждому независимому определяющему параметру соответствует одна степень свободы при выборе режима осуществления операции, а каждой независимой функции — бесконечное подмножество одномерного пространства R^1 степеней свободы, найдем, что полное число степеней свободы данной операции может быть представлено так:

$$S = (S^{Q},\ \sigma). \tag{33}$$

При упрощении системы технологических ограничений (27) необходимо иметь в виду следующие обстоятельства:

1. Число независимых уравнений (27.2) $\hat{J}_1$ можно для широкого круга задач считать равным числу определяющих функций $\hat{S}$. Это вытекает из того, что, во-первых, для многих операций потребление вещественных или энергетических компонентов на промежуточных фазах процесса ($0 \leqslant \leqslant \tau \leqslant \tau$) исключено самой его технологией (например, химические процессы в закрытых реакторах); в связи с этим не могут независимым образом меняться и внутренние параметры такого процесса; во-вторых, в тех случаях, когда такой независимо варьируемый функциональный параметр существует, он может быть представлен функцией от фазы фиксированного вида, в которой варьируемым остается конечное множество числовых параметров (как это было пояснено выше). Если указанное обстоятельство имеет место, то $\hat{J}_1 = \hat{S}$ и $\sigma = 0$, откуда вытекает, что число степеней свободы операции конечно и равно числу независимых определяющих параметров

$$S = S^{Q}. \tag{34}$$

2. Системы уравнений для функциональных и числовых параметров часто можно считать разрешимыми относительно $\hat{J}^Q$ параметров и $\hat{J}_1$ функций. Это обстоятельство становится почти очевидным, если понимать разрешимость в смысле возможности реализации численных методов решения.

3. Если имеют место оба указанных обстоятельства, во-первых, уравнения (27.2) могут быть разрешены относительно всех входящих в них функций. Подставляя полученные решения, имеющие вид

$$\hat{\xi}(\tau) = \psi(\hat{\Xi}^Q, \tau), \tag{35}$$

и вытекающие из них по (32) и (31) соотношения

$$\bar{\xi}(\tau) = \bar{\chi}(\hat{\Xi}^Q, \tau), \tag{36}$$

$$\hat{\Xi}_1^Q = \hat{\chi}^Q(\hat{\Xi}^Q) \tag{37}$$

в неравенства (27.1), получим вместо них

$$\hat{f}(\hat{\Xi}^Q, \tau) \leqslant 0. \tag{38}$$

Во-вторых, полную систему уравнений для числовых параметров найдем, присоединяя к (27.3) уравнения, получающиеся из (35) в результате дифференциальной Q-подстановки, распространенной на те $\xi^m(\tau)$, их производные и точки $q \in Q$, которые порождают в левой части уравнений числовые параметры, содержащиеся в $\hat{\Xi}^Q$.

Пусть число независимых уравнений полученной системы

$$\hat{f}_1(\hat{\Xi}^Q) = 0, \tag{39}$$

есть, согласно принятым обозначениям, $\hat{J}^Q$; тогда по предположению о разрешимости системы числовых уравнений можно выразить некоторые $\hat{J}^Q$ определяющих параметров через остальные S^Q. Эти последние будут уже независимыми. Перенумеруем их единым образом, и полученный вектор обозначим через π.

Подставляя такие выражения в (38), приходим к следующей простой форме технологических ограничений:

$$\tilde{f}(\pi, \tau) \leqslant 0. \tag{40}$$

Рассмотрим далее некоторую (j-ю) компоненту $\tilde{f}_j(\pi, \tau)$ вектор-функции $\tilde{f}(\pi, \tau)$. Положим

$$f_j(\pi) = \max_{0 \leqslant \tau \leqslant \tau} \tilde{f}_j(\pi, \tau). \tag{41}$$

Если предположить, в частности, что функция $\tilde{f}_j$ дифференцируема по τ в интервале $(0, \tau)$, то для тех точек π, для которых $\partial\tilde{f}_j / \partial\tau \geqslant 0$ на этом интервале, $f_j(\pi) = \tilde{f}_j(\pi, \tau_1)$; если же $\partial\tilde{f}_j / \partial\tau \leqslant 0$, то $f_j(\pi) = \tilde{f}_j(\pi, 0)$.

При помощи функций $f_j(\pi)$ технологические ограничения в форме (40) могут быть выражены только через параметры. Действительно, для того чтобы эти ограничения выполнялись, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\tilde{f}_j(\pi) \leqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, J. \tag{42}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае технологические ограничения операции сводятся к системе неравенств (42), накладываемых на *независимые определяющие параметры операции*. Такую упрощенную форму технологических ограничений назовем *разрешенной*.

При выполнении предположения о разрешимости системы уравнений (39) все определяющие параметры $\hat{\Xi}^Q$ могут быть выражены через независимые параметры π. Пусть это выражение будет

$$\hat{\Xi}^Q = \hat{\Psi}^Q_\pi(\pi). \tag{43}$$

Тогда по (31) все основные параметры могут быть выражены через независимые

$$\overset{0}{\Xi} = \overset{0}{\Psi}{}^Q_\pi(\pi). \tag{44}$$

Точно так же в соответствии с предположением о разрешимости уравнений (27.2) определяющие функции могут быть представлены явной зависимостью от фазы и параметров π. Именно, подставляя (43) в (35), получим

$$\hat{\xi}(\pi) = \hat{\psi}_\pi(\pi, \tau). \tag{45}$$

Поскольку матрица $\hat{\Xi}(\tau)$ * однозначно определяется вектором $\hat{\xi}(\tau)$, зависимости от π и τ для всех остальных функциональных параметров операции $\bar{\xi}(\tau)$ могут быть получены в явном виде из (32), как это выражено в (36) и теперь может быть в силу (43) переписано в виде

$$\bar{\xi}(\tau) = \bar{\psi}_\pi(\pi, \tau). \tag{46}$$

Таким образом, вся система интенсивных параметров операции может быть представлена выражением

$$\xi(\tau) = \psi_\pi(\pi, \tau). \tag{47}$$

Для фиксированного π эти соотношения дают точную систему функциональных зависимостей всех интенсивных параметров операции от фазы. Следовательно, вектор π однозначно определяет режим осуществления операции. Естественно поэтому конкретное значение вектора независимых параметров π назвать способом реализации операции.

Способ π определяет также с точностью до произвольного множителя расходы всех внешних продуктов операции в зависимости от ее фазы τ. Действительно, обозначая в соотношениях (5) $|\bar{x}^n(\bar{\tau})| = x$, получаем из них

$$x^n(\tau) = \alpha^n(\tau)x. \tag{48}$$

Но, согласно (6): $\alpha^n = \xi^n(\pi, \tau)$.

Чтобы подчеркнуть вытекающую отсюда параметрическую зависимость удельного и полного расходов $\alpha^n(\tau)$ и $x^n(\tau)$ продукта n (а также и $\bar{n}$) от способа π, будем писать выражение (48) в виде

$$x^n(\pi, \tau) = x(\pi)\alpha^n(\pi, \tau). \tag{49}$$

Величину $x(\pi)$, определяющую экстенсивные характеристики производственного процесса операции по способу π, естественно назвать *объемом производства способа* π.

Из уравнений (49) видно, что совокупность расходов $x^n(\pi, \tau)$ по способу π представляет собой линейную однопараметрическую систему в том смысле, что все характеризующие его экстенсивные расходные параметры выражаются линейно через один.

Изложенный общий метод описания операции может иметь двоякое значение: во-первых, он дает единообразную картину элементарного уровня иерархии экономической системы, что важно при теоретическом анализе последней; во-вторых, несмотря на некоторую тяжеловесность общей схемы, она может оказать помощь в конкретных исследованиях, в которых необходимо дать формализацию производственного процесса, пригодную для целей оптимизации или автоматизации управления.

Поступила в редакцию
10 VIII 1965

* Расширенная в соответствии с примечанием на стр. 221.