

## КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

*Р. Беллман, С. Дрейфус.* Прикладные задачи динамического программирования.

Перевод с англ. М., «Наука», 1965

Книга Р. Беллмана и С. Дрейфуса, изданная в 1962 г. Принстонским университетом, рассчитана на широкий круг экономистов, инженеров и математиков, интересующихся задачами оптимизации, и в особенности реально осуществимыми способами их решения с использованием современных вычислительных машин. По замыслу авторов книга должна продемонстрировать действенность динамического программирования как достаточно стандартизованного аппарата для фактического решения разнообразных вариационных и оптимизационных задач, интересных и важных для приложений. Думаешь, что для круга задач малой размерности эта цель успешно достигнута. В книге рассматривается с позиций динамического программирования большое число различных типов задач и ряд численных примеров экономического и технического содержания. Даются блок-схемы программ для решения задач на ЦВМ. Для многих примеров приведены результаты вычислений в виде таблиц и графиков, а также оценки необходимого объема памяти и затрат машинного времени.

В книге уделяется внимание другим методам оптимизации, их сравнению и связи с методом динамического программирования, однако здесь заметна некоторая субъективность авторов, расположенных во всех случаях усматривать лишь преимущества динамического программирования, хотя они иногда и указывают на плодотворность совмещения различных методов. В соответствии с поставленной целью в книге не рассматриваются вопросы строгого обоснования применяемых методов. Для читателя, желающего более глубоко ознакомиться с предметом, в конце каждой главы приводится список книг и работ, касающихся как различного рода задач и частных примеров, так и вопросов общего характера.

Книга написана живо и доступно. Она является вполне самостоятельной в том смысле, что чтение ее не требует знакомства с ранее переведенными на рус-

ский язык книгами Р. Беллмана по динамическому программированию\*.

Книга состоит из 12 глав и пяти приложений. Рассмотрим подробнее их содержание.

В главе I на примере задачи об оптимальном распределении одного вида ресурса обсуждаются трудности, возникающие при решении ее методами классического анализа, и дается понятие о методе динамического программирования. Определяется многошаговый процесс и формируется принцип оптимальности в качестве основного инструмента получения функциональных уравнений. Детально описывается постановка одномерной задачи на ЦВМ и приводится с необходимыми пояснениями блок-схема программы. В качестве конкретного примера рассмотрена задача о загрузке судна, для которой приведены численные результаты и графики, показывающие причудливую зависимость оптимальной политики загрузки от грузоподъемности судна.

В главе II рассмотрены многомерные задачи распределения, когда функции оптимального дохода, для которых составляются рекуррентные соотношения, зависят более чем от одной переменной. В качестве примера детально разобрана задача об оптимальном выборе ассортимента транспортируемых запасных частей при известном распределении спроса на них (стохастический аспект) и заданных ограничениях на вес и объем груза. Описана вычислительная процедура и приведены численные результаты. Авторы справедливо указывают на трудности численного решения функциональных уравнений при росте размерности, связанные с увеличением требований к объ-

\* Р. Беллман. Динамическое программирование. М., Изд-во иностр. лит., 1960; Р. Беллман, И. Гликсберг, О. Гросс. Некоторые вопросы математической теории управления. М., Изд-во иностр. лит., 1960; Р. Беллман. Процесс регулирования с адаптацией. М., «Наука», 1964.

ему памяти машины и значительным возрастанием длительности вычислений. Как возможный путь обхода этих трудностей подробно рассмотрен метод множителей Лагранжа, причем подчеркнута важность интерпретации этих множителей как цен. Применение метода множителей Лагранжа проиллюстрировано на примерах следующих задач: 1) нахождение оптимального соотношения расходов на производство и рекламу, 2) надежность многоступенчатых устройств на основе дублирования компонент с ограничениями на суммарную стоимость и вес дублирующих компонент, 3) транспортная задача с нелинейными стоимостями перевозок. Приведены блок-схемы программ и численные результаты.

Детально рассматривается другой возможный путь преодоления «проклятия размерности» — метод последовательных приближений в пространстве политик. Для двух численных примеров транспортной задачи приведены таблицы результатов последовательных итераций. Авторы, хотя и с оговорками, весьма оптимистически оценивают предложенные пути обхода трудностей, связанных с размерностью. Поэтому читатель должен иметь в виду, что указанные методы отнюдь не снимают проблему размерности для большого числа классов практически важных задач. В конце главы решена занимательная задача о «трудной переправе».

Глава III посвящена решению различных конкретных задач в области составления расписаний, как-то, задача о замене оборудования, задача о поставщике, планирование производственной линии и другие. Для одной из задач дана примерная блок-схема программы для ЦВМ. Приведены результаты численного решения многих примеров, а также для нескольких простых случаев задачи о поставщике показана возможность получения явного аналитического решения функциональных уравнений.

В главе IV метод динамического программирования применяется к некоторым задачам оптимального поиска. Найдена оптимальная политика поиска в задаче отыскания максимума унимодальной функции. Подробно рассмотрена задача об оптимальной процедуре поиска нуля выпуклой функции и приведены результаты для небольших значений числа выбираемых контрольных точек. В последних параграфах главы разобрана задача об оптимальном поиске не более чем двух фальшивых монет, приведены таблицы для ожидаемого числа взвешиваний и таблицы оптимальной политики в зависимости от априорного определения вероятностей числа фальшивых монет.

Глава V сильно отличается от других глав тем, что в ней не рассмотрено ни одной конкретной задачи. Она целиком посвящена изложению некоторых общих задач и методов вариационного исчисле-

ния и подходу к вариационным задачам с позиций динамического программирования. Получив при помощи принципа оптимальности разностное функциональное уравнение для вариационной задачи, авторы изящно, но чисто формально получают из него функциональное уравнение в частных производных и затем — некоторые классические теоремы вариационного исчисления.

В главе VI проиллюстрировано применение динамического программирования к задачам нахождения оптимальных траекторий. Подробно рассматриваются задачи о наборе самолетом высоты за минимальное время и выборе траектории спутника. Обсуждается в деталях процесс численного решения этих задач и приводятся таблицы результатов вычислений. В конце главы кратко рассмотрена задача о путешествиях.

В главе VII изучается упрощенная модель двухотраслевого экономического комплекса. Математическая формулировка приводит к задаче линейного программирования значительного размера, и выяснение зависимости решения от первоначальных запасов ресурсов требует длинных вычислений, если пользоваться стандартными методами линейного программирования. Авторы, рассматривая задачу в динамическом аспекте, находят и используют ее специфику и предлагают достаточно простой численный метод решения соответствующего функционального уравнения. Приведены блок-схема программы для ЦВМ и таблица результатов вычислений для конкретного примера.

В главе VIII излагается методика применения понятий и идей динамического программирования к некоторым задачам регулирования и управления в детерминированном и в стохастическом случаях. В конце главы рассмотрен пример процесса с адаптацией и приведены некоторые численные результаты.

В главе IX рассмотрены два частных примера процессов регулирования с обратной связью, приведены детальные результаты в виде графиков и таблиц.

В главе X кратко проанализированы особенности некоторых задач с линейными ограничениями и квадратичными критериями. Специальная форма критерия и ограничений позволяет в ряде случаев заменить функциональное уравнение задачи более простыми рекуррентными соотношениями. Численных примеров в главе нет.

В главе XI дается определение марковского процесса решения и описывается метод Ховарда итераций в пространстве политик для получения последовательных приближений к оптимальной политике. Этот метод детально проиллюстрирован на простом численном примере «задачи о такси». В качестве более сложных и более реалистических задач этого

типа рассмотрены две задачи о замене оборудования, приведены таблицы результатов вычислений.

В главе XII рассмотрена возможность упрощения вычислительных процедур динамического программирования при помощи аппроксимации функций полиномами Лежандра, приведен численный пример; однако никакой оценки точности метода не дано. Так же, на-глазок, для двух простых вариационных задач проведено сравнение численных решений, полученных методом динамического программирования, с точными решениями этих задач.

В приложении I найдена область выпуклости определенной конкретной функции. Этот результат использовался в § 23 главы II.

В приложении II дается оригинальная трактовка теории двойственности в математическом программировании; в приложении III — метод последовательных приближений в пространстве политик для

дискретного аналога задачи Майера; в приложении IV — краткое описание свойств преобразования, названного авторами преобразованием максимума; в приложении V — основные характеристики машины Джонниак, на которой было получено большинство численных результатов, помещенных в книге.

Настоящий перевод книги Р. Беллмана и С. Дрейфуса выполнен в основном удовлетворительно. Однако в ряде мест английский текст переведен дословно, встречаются неудачные фразы и словосочетания. Например, на стр. 332 читаем: «...будут требоваться только зачаточные значения...»; на стр. 295: «...модели приспособления адаптации...» и т. п. Появилось большое число опечаток, не встречавшихся в английском оригинале.

К достоинствам данного издания следует отнести его хорошее внешнее оформление и умеренную цену.

*Ю. К. Солцев*

## **Н. П. Бусленко. Математическое моделирование производственных процессов на цифровых вычислительных машинах.**

М., «Наука», 1964

Среди математических методов, используемых для решения проблем организации производства, экономики и исследования операций, существенное место занимают методы статистического моделирования. Метод статистического моделирования, известный в литературе также под названием метода Монте-Карло, дает возможность конструировать для ряда важных задач алгоритмы, хорошо приспособленные к реализации на ЭВМ.

К сожалению, литература по этому вопросу очень бедна. В этой связи рецензируемая книга является особенно ценной.

Книга состоит из четырех частей. В первой части даются общие сведения о моделировании процессов и принципах их формализации и математического описания. Здесь приводятся строгие определения таких сложных понятий, как понятия процесса функционирования системы, характеристики процесса, математической модели и др. На простейших примерах (колебание пружинного маятника и т. д.) показывается, что «математическая модель реального процесса есть некоторый математический объект, поставленный в соответствие данному физическому процессу», которая может появиться только в результате четкого формального описания рассматриваемого процесса с наперед заданной степенью приближения к действительности. Таким образом, «построение математической модели представляет собой необходимый шаг любого серьезного исследования процесса».

В своей монографии автор очень четко

указывает этапы работы исследователя.

После формализации процесса особое внимание обращается на «использование математической модели для получения общих закономерностей, связанных с исследуемым процессом, при конкретных числовых зависимостях между фигурирующими величинами». Автор подчеркивает, что при использовании математической модели для исследования реального процесса в первую очередь необходимо наметить совокупность искомых величин (характеристик процесса, параметров системы и начальных условий или функций от них). После того как искомые величины выбраны, изучается возможность использования математической модели.

Для моделирования процесса на ЭВМ необходимо преобразовать его математическую модель в специальный моделирующий алгоритм. В соответствии с этим алгоритмом в машине вырабатывается информация, описывающая элементарные явления исследуемого процесса с учетом их связей и взаимных влияний. Определенная часть циркулирующей информации выводится на печать и используется для определения тех характеристик процесса, которые требуется получить в результате моделирования.

В большинстве случаев моделирование процессов этим методом производится с учетом и имитацией случайных факторов. Поэтому такой метод часто называют методом статистического моделирования.

Автор показывает, что метод статистического моделирования имеет весьма об-